ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT

J. Math. Pures Appl. 82 (2003) 1697–1731

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

www.elsevier.com/locate/matpur

Ahlfors-régularité des quasi-minima de Mumford–Shah

Anthony Siaudeau *

Reçu le 5 mars 2003

Résumé

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On considère sur Ω les compétiteurs (U, K) de la fonctionnelle réduite de Mumford–Shah, c'est-à-dire la fonctionnelle de Mumford–Shah dans laquelle le terme en norme $\mathbb{L}^2$ de U a disparu, où K est un fermé de Ω et U une fonction sur $\Omega \setminus K$ dont le gradient est dans $\mathbb{L}^2$. Le résultat principal de cet article est qu'il existe une constante c pour laquelle, lorsque (U, K) est un quasi-minimiseur de cette fonctionnelle et $B(x, r)$ une boule centrée sur K et incluse dans Ω avec un rayon borné, la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$ de $K \cap \overline{B}(x, r)$ est majorée par cr^{N-1} et minorée par $c^{-1}r^{N-1}$.

Abstract

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be an open set. We consider on Ω the competitors (U, K) for the reduced Mumford–Shah functional, that is to say the Mumford–Shah functional in which the $\mathbb{L}^2$-norm of U term is removed, where K is a closed subset of Ω and U is a function on $\Omega \setminus K$ with gradient in $\mathbb{L}^2$. The main result of this paper is the following: there exists a constant c for which, whenever (U, K) is a quasi-minimizer for the reduced Mumford–Shah functional and $B(x, r)$ is a ball centered on K and contained in Ω with bounded radius, the $\mathcal{H}^{N-1}$-measure of $K \cap \overline{B}(x, r)$ is bounded above by cr^{N-1} and bounded below by $c^{-1}r^{N-1}$.

Mots-clés : Mumford–Shah ; Quasi-minimiseur ; Ahlfors-régularité

Keywords: Mumford–Shah; Quasi-minimizer; Ahlfors-regularity

* Autheur correspondant.
Adresse e-mail : anthony.siaudeau@math.u-psud.fr (A. Siaudeau).

0021-7824/$ – see front matter
doi:10.1016/S0021-7824(03)00067-9

1. Introduction

Dans cet article on s'intéressera à l'Ahlfors-régularité de certains minimiseurs de la fonctionnelle de Mumford–Shah, on cherchera à étendre un résultat de [2] et [5] sur les minimiseurs de problèmes à discontinuité libre avec les méthodes introduites dans [4] mais sans utiliser de fonctions SBV (voir [1]). On montrera qu'une famille plus générale de quasi-minimiseurs que dans ces articles, incluant les minima locaux de Mumford–Shah, a encore la propriété d'Ahlfors-régularité. On considèrera sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ la fonctionnelle :

$$F(U, c, \omega) = \int_{\omega \setminus K} |\nabla U|^2 + c\mathcal{H}^{N-1}(K \cap \omega),$$

où $\omega \subset \Omega$, K est un fermé de Ω et $U \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus K)$. On dira alors que (U, K) est un couple admissible pour la fonctionnelle et que K est l'ensemble singulier de U. On notera :

Définition 1. Soit $\mathcal{A}(\Omega) = \{(U, K) \mid K$ est un fermé de Ω et $U \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus K)\}$ l'ensemble des couples admissibles pour la fonctionnelle F.

On désire montrer le :

Théorème 2. *Pour tout $M \geqslant 1$, il existe $a > 0$ tel que pour U un (r_0, M, a)-quasi-minimum réduit, topologique ou non, il existe une constante c ne dépendant que de (r_0, M, a) telle que*

$$\textit{dès que} \quad \overline{B}_\rho(x) \subset \Omega \quad \textit{avec } \rho < r_0 \textit{ et } x \in K,$$

$$c^{-1}\rho^{N-1} \leqslant \mathcal{H}^{N-1}\big(K \cap \overline{B}_\rho(x)\big) \leqslant c\rho^{N-1}. \tag{1.1}$$

La notion de couple "réduit" évite qu'il y ait des parties artificielles dans l'ensemble singulier, parties qu'on ne pourrait pas contrôler car elles ne sont soumises à aucune condition.

Définition 3. On dit d'un couple admissible (U, K) qu'il est réduit s'il n'existe pas de couple admissible (V, K') tel que $K' \subset K$ avec $K' \neq K$ et $V = U$ sur $\Omega \setminus K$.

La notion de (r_0, M, a)-quasi-minimum (introduite dans [3]) est plus générale que celle de [2] et [1]. Elle se définit comme suit :

Définition 4. On dira que (V, K') est un compétiteur de (U, K) dans la boule $B(x, r)$ si (V, K') est un couple admissible tel que

$$V(y) = U(y) \quad \text{pour p.t. } y \in \Omega \setminus B(x, r) \quad \text{et} \quad K \setminus \overline{B}(x, r) = K' \setminus \overline{B}(x, r).$$

Notant

$$E = \int\limits_{B(x,r)\setminus K} |\nabla U|^2, \qquad E' = \int\limits_{B(x,r)\setminus K'} |\nabla V|^2 \quad \text{et} \quad \delta E = \max\bigl(E' - E, M(E' - E)\bigr),$$

on appellera défaut de quasiminimalité le nombre,

$$\Psi_M\bigl(U, c, \overline{B}(x,r)\bigr) = \sup\bigl(c\mathcal{H}^{N-1}(K\setminus K') - cM\mathcal{H}^{N-1}(K'\setminus K) - \delta E\bigr), \tag{1.2}$$

la borne supérieure étant prise sur tous les compétiteurs (V, K') de (U, K) dans $B(x,r)$. Si $c = 1$ on notera $\Psi_M(U, \overline{B}(x,r))$ au lieu de $\Psi_M(U, 1, \overline{B}(x,r))$.

Définition 5 (*quasi-minimum*). On dira d'un compétiteur (U, K) qu'il est un (r_0, M, a)-quasi-minimum si pour toute boule $B(x,r)$ avec $r < r_0$ on a :

$$\Psi_M\bigl(U, \overline{B}(x,r)\bigr) \leqslant ar^{N-1}.$$

On remarque que si $M = 1$ on retrouve la définition de quasi-minimum de [1].

On définit également les compétiteurs topologiques et les quasi-minima topologiques.

Définition 6. On dit que (V, K') est un compétiteur topologique de (U, K) dans la boule $B(x,r)$ si (V, K') est un compétiteur de (U, K), si $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$ et si $y, z \in \Omega\setminus[K \cup \overline{B}(x,r)]$ sont séparés par K dans Ω, alors K' les sépare aussi dans Ω.

Notons E, E' et δE, comme dans la définition non topologique. On appelle défaut de quasiminimalité topologique le nombre :

$$\overline{\Psi}_M\bigl(U, c, \overline{B}(x,r)\bigr) = \sup\bigl(c\mathcal{H}^{N-1}(K\setminus K') - cM\mathcal{H}^{N-1}(K'\setminus K) - \delta E\bigr),$$

la borne supérieure étant prise sur tous les compétiteurs topologiques (V, K') de (U, K) dans $B(x,r)$. Si $c = 1$ on notera $\overline{\Psi}_M(U, \overline{B}(x,r))$ au lieu de $\overline{\Psi}_M(U, 1, \overline{B}(x,r))$.

Définition 7 (*quasi-minimum topologique*). On dit d'un compétiteur (U, K) qu'il est un (r_0, M, a)-quasi-minimum topologique si pour toute boule $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$ on a :

$$\overline{\Psi}_M\bigl(U, \overline{B}(x,r)\bigr) \leqslant ar^{N-1}.$$

Remarque 8. Si (U, K) est un (r_0, M, a)-quasi-minimum, topologique ou non, alors il existe $M_a > 0$ tel que

$$\text{si} \quad B(x,\rho) \subset \Omega \quad \text{avec } \rho < \rho_0 \quad \text{alors} \quad F\bigl(U, \overline{B}_\rho(x)\bigr) \leqslant M_a\rho^{N-1}.$$

Cette inégalité s'obtient par comparaison directe avec le compétiteur qui est nul à l'intérieur de $B_\rho(x)$ et auquel on a ajouté $\partial B_\rho(x)$ à l'ensemble singulier.

Pour montrer (1.1) on va procéder par l'absurde comme dans [4]. Dans la partie 2, on construira un Théorème 10 de Sobolev–Poincaré pour des fonctions légèrement tronquées provenant des couples admissibles. Dans la partie suivante on en déduira les résultats de compacité (Proposition 12 et Théoremes 15 et 17) qui expliquent que, si pour une suite de couples admissibles la mesure de l'ensemble singulier tend vers 0, à la limite on obtient une fonction régulière sans ensemble singulier. Puis dans la partie 4 on montrera par le Lemme 19 que si la densité de mesure de l'ensemble singulier est trop petite dans une boule (en niant (1.1)) alors elle ne va pas arrêter de décroître ce qui contredira le Lemme 20.

On montrera également la propriété pour des quasi-minima dits topologiques qui différent des quasi-minima par une condition topologique sur les compétiteurs (voir les Définitions 6 et 7).

Enfin on étendra le résultat à des fonctionnelles plus générales que F. Par abus de notation on notera $U \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash K)$ au lieu de $(U, K) \in \mathcal{A}(\Omega)$ (lorsqu'il n'y a pas de confusion possible). Dans toute la suite on notera $m = N - 1$, B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$, $B' = \frac{1}{2}B$, $B'' = \frac{3}{4}B$ et on utilisera l'abréviation p.t. pour *presque tout*.

Pour des commodités d'écriture on notera $F(U, C)$ au lieu de $F(U, 1, C)$ et on ne s'intéressera qu'à des couples admissibles (U, K) tels que pour tout compact C, $F(U, C) < +\infty$.

2. Inégalité de Sobolev–Poincaré sur $W^{1,2}(\Omega\backslash K)$

Pour obtenir une estimation du type inégalité de Poincaré, on a besoin de contrôler U sur un ensemble relativement gros en fonction de l'intégrale du gradient, d'où le lemme suivant.

Lemme 9. *Soit $A = \overline{B}\backslash B'$. Il existe trois constantes a, c_1, c_2 telles que pour tout ε de $]0, a]$ et pour tout U appartenant à $W^{1,1}(2B\backslash K)$, si $\mathcal{H}^m(K \cap A) \leqslant c_1\varepsilon^m$, alors il existe un ensemble mesurable $G \subset A$ et il existe α tels que*

$$|A\backslash G| \leqslant \varepsilon \quad \textit{et} \quad \left|U(x) - \alpha\right| \leqslant c_2\varepsilon^{-N} \int_{A\backslash K} |\nabla U| \quad \textit{pour tout } x \textit{ dans } G.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension N.

• Pour $N = 1$ prenons $c_1 < 1$, alors ayant $\mathcal{H}^0(K \cap A) \leqslant c_1$ on a $K \cap A = \emptyset$ et nos hypothèses deviennent alors celles de l'inégalité de Poincaré, ie : pour tout U appartenant à $W^{1,1}(2B)$, il existe α tel que

$$\int_A \left|U(x) - \alpha\right| \mathrm{d}x \leqslant c \int_A |\nabla U|.$$

Prenons

$$G = \left\{ x \in A \;\middle|\; \left|U(x) - \alpha\right| \leqslant c_2 \varepsilon^{-1} \int\limits_{A \setminus K} |\nabla U| \right\}.$$

Pour $c_2 = c$, par inégalité de Tchebytchev,

$$|A \setminus G| \leqslant \varepsilon.$$

Et ainsi la propriété est vraie à l'ordre 0.

• Montrons la propriété à l'ordre N en la supposant vraie à l'ordre $N-1$.

Notons $c_1^{(N-1)}$ et $c_2^{(N-1)}$ les constantes de l'énoncé relatives à la dimension $N-1$. On souhaite, via des difféomorphismes locaux, se ramener à la place de A à des cylindres qu'on traitera feuille par feuille. On peut recouvrir $\mathcal{S}^{N-1}$ par des ouverts relatifs U_i ($i \in I$ fini), qui ne diffèrent que par une rotation, tels qu'il existe une carte locale f_i, C^1 un difféomorphisme qui envoie U_i sur B_{N-1} la boule unité de $\mathbb{R}^{N-1}$ et $\overline{U}_i$ sur $\overline{B}_{N-1}$. De plus, quitte à avoir un recouvrement très redondant on peut supposer que $\mathcal{S}^{N-1}$ est recouvert par les $W_i = f_i^{-1}(A_{N-1})$ où $A_{N-1} = \overline{B}_{N-1} \setminus \frac{1}{2} B_{N-1}$.

Dans toute la suite on notera $R = [\frac{1}{2}, 1]$.

Soit

$$\Psi_i : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \overline{B}_{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \\ (r, y) \longmapsto r f_i^{-1}(y); \end{cases}$$

Ψ_i est un C^1 difféomorphisme de $R \times \overline{B}_{n-1}$ sur son image V_i et de plus on a pour tout $i \in I$, pour tout $r \in R$ et pour tout $y \in \overline{B}_{N-1}$,

$$c^{-1} \leqslant \left|\operatorname{Jac} \Psi_i(r, y)\right| \leqslant c.$$

On fixe i appartenant à I et on note $D_i = \Psi_i(R \times A_{N-1})$, on définit de plus $\widetilde{U}_i = U \circ \Psi_i$ et $\widetilde{K}_i = \Psi_i^{-1}(K \cap \Psi_i(R \times \overline{B}_{N-1}))$. Ainsi $\widetilde{U}_i \in W^{1,1}(R \times B_{N-1} \setminus \widetilde{K}_i)$ et pour p.t. $\rho \in R$,

$$\begin{aligned} &U_{i,\rho} = \widetilde{U}_i(\rho, \cdot) \in W^{1,1}\big(B_{N-1} \setminus \widetilde{K}_i(\rho)\big) \quad \text{où } \widetilde{K}_i(\rho) = \widetilde{K}_i \cap \big(\{\rho\} \times \overline{B}_{n-1}\big) \quad \text{et} \\ &\frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{U}_i(\rho, \cdot) = \frac{\partial}{\partial x_j} U_{i,\rho}(\cdot) \quad \forall j = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Soit γ une constante qu'on précisera ultérieurement ($\gamma \geqslant 1$).

On ne s'intéresse qu'aux rayons (nombreux) pour lesquels on va pouvoir utiliser l'hypothése de récurrence. Soit H_i l'ensemble des ρ appartenant à R tels que

$$\mathcal{H}^{N-2}\big(\widetilde{K}_i(\rho) \cap A_{N-1}\big) > c_1^{(N-1)} \frac{\varepsilon^{N-2}}{\gamma} \quad \text{ou} \int\limits_{A_{N-1}} |\nabla U_{i,\rho}|(\rho, \cdot) > \frac{\gamma}{\varepsilon} \int\limits_{A \setminus K} |\nabla U|.$$

Ainsi par l'inégalité de Tchebytchev on a :

$$|H_i| \leqslant \frac{\gamma}{c_1^{N-1}\varepsilon^{N-2}} \int_R \mathcal{H}^{N-2}\big(\widetilde{K}_i(\rho)\cap A_{N-1}\big)\,\mathrm{d}\rho$$
$$+\,\varepsilon \int_R \int_{A_{N-1}} \big|\nabla \widetilde{U}_i\big|(\rho,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\rho \Bigg/ \Bigg(\gamma \int_{A\backslash K} |\nabla U|\Bigg)$$

et par la formule de désintégration,

$$|H_i| \leqslant \gamma c c_1 \varepsilon + c\frac{\varepsilon}{\gamma} \leqslant \frac{2c\varepsilon}{\gamma} \quad \text{en prenant } c_1 = \frac{1}{\gamma^2}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $U_{i,\rho}$ pour $\rho \in R\backslash H_i$ (qu'on note V) et ε/γ. Pour tout ρ de V il existe $G_\rho \subset A_{N-1}$ mesurable avec

$$\mathcal{L}^m(A_{N-1}\backslash G_\rho) \leqslant \frac{\varepsilon}{\gamma} \tag{2.3}$$

et il existe α_ρ tel que pour tout x de G_ρ,

$$\big|U_{i,\rho}(x) - \alpha_\rho\big| \leqslant c_2^{(N-1)}\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^m \int_{A_{N-1}} |\nabla U_{i,\rho}|. \tag{2.4}$$

On va à présent montrer que les α_ρ, pour $\rho \in V$, sont relativement proches. Pour ce faire on approche U par des fonctions régulières, f_n. Par définition de la mesure de Hausdorff (voir [7]) on peut trouver un fermé Q_i strictement inclus dans A_{N-1} tel que $R \times Q_i$ ne rencontre pas $\widetilde{K}_i$ (notamment $R\times Q_i$ est à distance positive de $\widetilde{K}_i$) et $|A_{n-1}\backslash Q_i| \leqslant c\varepsilon$.

Soit $R' \Subset R$ un intervalle compact tel que $|R\backslash R'| \leqslant \varepsilon/\gamma$. Il existe une suite $(f_n)_n$ de $C_0^\infty((R\times A_{N-1})\backslash \widetilde{K}_i)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_k = \widetilde{U}_i \quad \text{dans } L^1(R'\times Q_i), \qquad \lim_{n\to\infty} \nabla f_k = \nabla \widetilde{U}_i \quad \text{dans } L^1(R'\times Q_i).$$

On a alors,

$$\int_{(R'\cap V)^2} \int_{Q_i} \big|f_n(\rho,x) - f_n(\rho',x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho' \leqslant \int_{(R'\cap V)^2} \int_{Q_i} \int_{R'} |\nabla f_n|(r,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}r$$
$$\leqslant \frac{1}{4} \int_{R'\times Q_i} |\nabla f_n|,$$

puis par passage à la limite en n,

$$\int_{(R'\cap V)^2\times Q_i} \big|U_{i,\rho}(x) - U_{i,\rho'}(x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho' \leqslant \frac{1}{4} \int_{R'\times Q_i} \big|\nabla \widetilde{U}_i\big| \leqslant c \int_{A\backslash K} |\nabla U|$$

et par l'inégalité de Tchebytchev :

$$\left|\left\{(\rho,\rho')\in(R'\cap V)^2\ \middle|\ \int_{Q_i}\left|U_{i,\rho}(x)-U_{i,\rho'}(x)\right|>c\frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{A\setminus K}|\nabla U|\right\}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Ainsi ils existent ρ_0 appartenant à $V\cap R'$ et $V'\subset V\cap R'$, avec $|(V\cap R')\setminus V'|\leqslant 10\varepsilon/\gamma$, tels que

$$\int_{Q_i}\left|U_{i,\rho}(x)-U_{i,\rho_0}(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N\int_{A\setminus K}|\nabla U|\quad\forall\rho\in V'. \tag{2.5}$$

Soit $\alpha_i=\alpha_{\rho_0}$ et ρ appartenant à V'. Soit $\Theta_\rho=Q_i\cap G_\rho\cap G_{\rho_0}$ alors en utilisant (2.4) et (2.5), il vient :

$$\begin{aligned}|\alpha_i-\alpha_\rho|&=\frac{1}{|\Theta_\rho|}\int_{\Theta_\rho}|\alpha_i-\alpha_\rho|\\&\leqslant\frac{1}{|\Theta_\rho|}\left[\int_{\Theta_\rho}\left|\alpha_\rho-U_{i,\rho}(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{\Theta_\rho}\left|\alpha_{\rho_0}-U_{i,\rho_0}(x)\right|\mathrm{d}x\right.\\&\qquad\left.+\int_{\Theta_\rho}\left|U_{i,\rho}(x)-U_{i,\rho_0}(x)\right|\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant 2c_2^{(N-1)}\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^m\frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{A\setminus K}|\nabla U|+c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N\frac{1}{|\Theta_\rho|}\int_{A\setminus K}|\nabla U|.\end{aligned}$$

Or $|A_{N-1}\setminus\Theta_\rho|\leqslant 2\varepsilon/\gamma+c\varepsilon$ donc, si γ est suffisamment grand et ε assez petit, pour tout ρ de V' $|\Theta_\rho|\geqslant|A_{N-1}|/2$ et ainsi

$$|\alpha_i-\alpha_\rho|\leqslant c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N\int_{A\setminus K}|\nabla U|, \tag{2.6}$$

de plus,

$$|R\setminus V'|\leqslant|R\setminus V|+|R\setminus R'|+\left|(R'\cap V)\setminus V'\right|\leqslant\frac{2c\varepsilon}{\gamma}+\frac{\varepsilon}{\gamma}+\frac{10\varepsilon}{\gamma}\leqslant\frac{c\varepsilon}{\gamma}. \tag{2.7}$$

Il vient par (2.4) et (2.6) pour tout ρ appartenant à V' et tout x de G_ρ :

$$\left|\widetilde{U}_i(\rho,x)-\alpha_i\right|\leqslant c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N\int_{A\setminus K}|\nabla U|.$$

Soit

$$P_i = \left\{ z \in R \times A_{N-1} \;\middle|\; \left|\widetilde{U}_i(z) - \alpha_i\right| \leqslant c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N \int\limits_{A\setminus K} |\nabla U| \right\}.$$

Soit $W = (R \times A_{N-1})\setminus P_i$ ainsi $|W| = \int_R \int_{A_{N-1}} \mathbf{1}_W(r,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r$ et donc

$$|W| \leqslant |R\setminus V'| \cdot |A_{N-1}| + \int\limits_{V'} \mathcal{L}^m(A_{N-1}\setminus G_\rho)\,\mathrm{d}\rho,$$

puis par (2.3) et (2.7),

$$|W| \leqslant \frac{c\varepsilon}{\gamma}|A_{N-1}| + \frac{\varepsilon}{\gamma}|V'| \leqslant \frac{c\varepsilon}{\gamma}.$$

Soit $F_i = \Psi_i(P_i)$, on a alors $|D_i\setminus F_i| \leqslant c|W| \leqslant c\varepsilon/\gamma$ et pour tout $z \in F_i$,

$$\left|U(z) - \alpha_i\right| \leqslant c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N \int\limits_{A\setminus K} |\nabla U|. \tag{2.8}$$

Pour tous i, j appartenant à I $(i \neq j)$, on peut trouver une suite finie $(k_l)_{l=1}^{N_{ij}}$ où $D_{k_1} = D_i$ et $D_{k_{N_{ij}}} = D_j$ telle que pour tout l on ait $|D_{k_l} \cap D_{k_{l+1}}| \geqslant c$ (où c est une constante géometrique qui ne dépend que de I, de plus N_{ij} est majoré par $\operatorname{card}(I)$.)

Dès que γ est suffisamment grand, $|F_{k_l} \cap F_{k_{l+1}}| \geqslant c/2$ pour tout l, notamment $F_{k_l} \cap F_{k_{l+1}} \neq \emptyset$ et donc

$$|\alpha_{k_{l+1}} - \alpha_{k_l}| \leqslant 2c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N \int\limits_{A\setminus K} |\nabla U|$$

et ainsi

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leqslant 2\operatorname{card}(I) c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N \int\limits_{A\setminus K} |\nabla U|. \tag{2.9}$$

Prenons alors $\alpha = \alpha_{k_0}$ où k_0 appartient à I et $G = \bigcup_{i\in I} F_i$ il suit de (2.8) et (2.9) que pour tout z dans G,

$$\left|U(z) - \alpha\right| \leqslant 2\operatorname{card}(I)\, c\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^N \int\limits_{A\setminus K} |\nabla U| \quad \text{et} \quad |A\setminus G| \leqslant \sum_{i\in I} |\Theta_i\setminus F_i| \leqslant \frac{\operatorname{card}(I)\, c\varepsilon}{\gamma}.$$

Prenons enfin γ suffisamment grand et $c_2 = \mathrm{card}(I)c\gamma^N$, alors pour tout z de G,

$$\left|U(z) - \alpha\right| \leqslant \frac{c_2}{\varepsilon^N} \int\limits_{A\setminus K} |\nabla U| \quad \text{et} \quad |A\setminus G| \leqslant \varepsilon.$$

ce qui termine la démonstration. □

En raison du mauvais comportement de U au voisinage de K, nous ne savons pas obtenir d'inégalité de Poincaré pour U mais, par contre, si on lui retranche une certaine constante et surtout sion la tronque près de K un contrôle devient possible.

Théorème 10. *Il existe des constantes c, c_0 et c_p telles que pour U appartenant à $W^{1,2}(B\setminus K)$ avec $\mathcal{H}^m(K) < c_0$, il existe un fermé H de $\overline{B}''$ et une constante α tels que pour $\overline{U} = (U - \alpha)\mathbf{1}_{B''\setminus H}$ on ait les propriétés suivantes* :

(i) $\overline{U} \in W^{1,2}(B''\setminus \partial H)$,

(ii) $\mathcal{H}^m(\partial H) \leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K)\big)$,

(iii) $|H| \leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K)\big)^{N/(N-1)}$,

(iv) $\|\overline{U}\|_{\mathbb{L}^p(B'')} \leqslant c_p \|\nabla U\|_{\mathbb{L}^2(B)}$ *pour* $p \in \left[2, \dfrac{2N}{N-2}\right[$.

Démonstration. Si $\mathcal{H}^m(K) = 0$ le résultat est acquis par les inégalités de Poincaré, on peut donc supposer que $\mathcal{H}^m(K) > 0$.

Soit $A_k(x) = \{z \in \mathbb{R}^N \mid 2^{-k} \leqslant |z - x| \leqslant 2^{-k+1}\}$.

Soit $\widetilde{H} = \{x \in \overline{B}'' \mid \exists k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 3,\ \text{tel que } \mathcal{H}^m(K \cap A_k(x)) \geqslant C_N 2^{-km}\}$ où C_N est une constante à préciser.

Soit $K' = K \cap \overline{B}''$ et $H' = \widetilde{H} \cup K'$. Montrons que H' est fermé.

Soit $(x_k)_k$ une suite de H' qui converge vers x. Quitte à extraire une sous-suite qu'on note encore (x_k) :

- soit x_k appartient à K' pour tout k et alors x appartient à K' donc à H',
- soit x_k appartient à $\widetilde{H}$ pour tout k et donc il existe un entier l_k tel que,

$$\mathcal{H}^m\big(K \cap A_{l_k}(x_k)\big) \geqslant C_N 2^{-l_k m},$$

- soit (l_k) est bornée et alors quitte à extraire une sous-suite (l_k) est stationnaire de valeur l_0 et ainsi

$$\mathcal{H}^m\big(K \cap A_{l_0}(x_k)\big) \geqslant C_N 2^{-l_0 m}$$

et donc

$$\mathcal{H}^m\big(K \cap A_{l_0}(x)\big) \geqslant C_N 2^{-l_0 m}$$

et ainsi x appartient à H',

– soit (l_k) n'est pas bornée et alors quitte à extraire une sous-suite $\lim_{k\to\infty} l_k = +\infty$ puis $d(x,K) \leqslant d(x,x_k) + d(x_k,K)$ pour tout k et ainsi $d(x,K) \leqslant d(x,x_k) + 2^{-l_k+1}$ et donc x appartient à K et donc à H'.

Ainsi H' est un fermé.

On va maintenant recouvrir H' par H qui est un petit peu plus grand de manière à contrôler la mesure du bord de H. A tout x de $\widetilde{H}$ correspond un entier k_x et on a $\widetilde{H} \subset \bigcup_{x\in\widetilde{H}} B(x, 2^{-k_x})$. Notons $B_x = B(x, 2^{-k_x})$ pour tout x appartenant à H, alors $\{B_x \mid x \in \widetilde{H}\}$ est une collection de boules, de rayons bornés, dont l'union est recouverte par un ensemble borné. Par un lemme de recouvrement classique (voir [8, chapitre 1]) il existe un sous-ensemble $\{B_x \mid x \in F\}$ de cette collection, au plus dénombrable composé d'éléments disjoints tels que

$$\bigcup_{x\in\widetilde{H}} B_x \subset \bigcup_{x\in F} (5B_x)$$

et puisque ces ensembles sont disjoints, il vient :

$$5^m \sum_{x\in F} 2^{-k_x m} \leqslant \frac{5^m}{C_N} \sum_{x\in F} \mathcal{H}^m\big(K \cap A_{k_x}(x)\big) \leqslant c\mathcal{H}^m(K). \tag{2.10}$$

Par ailleurs par définition de la mesure $\mathcal{H}^m$ on peut recouvrir K' par $\bigcup_{x\in I} B(x, r_x)$ avec I au plus dénombrable,

$$r_x \leqslant \big(\mathcal{H}^m(K)\big)^{1/(N-1)} \quad \text{et} \tag{2.11}$$

$$C_{(m)} \sum_{x\in I} r_x^m \leqslant 2\mathcal{H}^m(K), \tag{2.12}$$

où $C_{(m)}$ est la constante qui intervient dans la définition de $\mathcal{H}^m$ pour la faire coincider avec $\mathcal{L}^m$ sur les hyperplans de $\mathbb{R}^N$. Ainsi,

$$5^m \sum_{x\in F} 2^{-k_x m} + \sum_{x\in I} r_x^m \leqslant c\mathcal{H}^m(K),$$

H' étant compact on peut se restreindre à F et I finis pour le recouvrir.

Prenons alors $H = (\bigcup_{x\in F\cup I} \overline{B}_x) \cap \overline{B}''$. H est bien fermé et $\mathcal{H}^m(\partial H) \leqslant c\mathcal{H}^m(K)$ de plus d'après (2.10), (2.11) et (2.12),

$$|H| \leqslant C\left(5^N \sum_{x\in F} 2^{-k_x N} + \sum_{x\in I} r_x^N\right) \leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K)\big)^{N/(N-1)}.$$

Enfin pour tout α on pose $\overline{U} = (U-\alpha)\mathbf{1}_{B''\setminus H}$ alors $\overline{U}$ appartient à $W^{1,2}(B''\setminus\partial H)$ ce qui nous montre (i)–(iii).

Montrons à présent (iv).

Soit x appartenant à $B''\backslash H$ i.e. $\mathcal{H}^m(K \cap A_k(x)) < C_N 2^{-km}$ pour tout $k \geqslant 3$. On fixe $k \geqslant 4$. Notons $V_k(y) = U(x + 2^{-k}y)$ et $K_k(x) = 2^k((K \cap 2^{-k+1}\overline{B}(x)) - x)$ alors $V_k \in W^{1,2}(2B\backslash K_k)$ et $\mathcal{H}^m(K_k(x) \cap A) \leqslant C_N 2^{-m}$ et en prenant C_N assez petit, d'après le Lemme 9, il existe γ (de l'ordre de $C_N^{1/m}$), α_k, $c > 0$ et $\widetilde{G}_k(x) \subset A$ mesurable tels que

$$\left|A\backslash\widetilde{G}_k(x)\right| \leqslant \gamma \quad \text{et} \quad \left|V_k(y) - \alpha_k\right| \leqslant c\int_A |\nabla V_k| \quad \forall y \in \widetilde{G}_k(x).$$

En prenant $G_k(x) = x + 2^{-k}\widetilde{G}_k(x)$ il vient que pour tout y appartenant à $G_k(x)$

$$\left|U(y) - \alpha_k\right| \leqslant c2^{km} \int_{A_k(x)} |\nabla U| \quad \text{et} \quad \left|A_k(x)\backslash G_k(x)\right| \leqslant \gamma 2^{-kN}$$

et notamment pour tout y et z de $G_k(x)$,

$$\left|U(y) - U(z)\right| \leqslant c2^{km} \int_{A_k(x)} |\nabla U|. \tag{2.13}$$

On peut recouvrir $K \cap A_k(x)$ par des boules B_x de rayon r_x, pour x dans J au plus dénombrable, telles que $r_x \leqslant 2^{-k}$ et

$$C_{(m)} \sum_{x\in J} r_x^m \leqslant 2\mathcal{H}^m\big(K \cap A_k(x)\big) \leqslant 2C_N 2^{-km}.$$

Puisque $K \cap A_k(x)$ est compact, on peut prendre J fini pour le recouvrir. On projette alors radialement $\bigcup_{x\in J} \overline{B}_x$ sur $\mathbb{S}^{N-1}$ et ensuite on ne s'intéresse qu'aux points de $A_k(x)$ dont l'axe radial ne rencontre pas cette projection. On se place ainsi sur un ensemble de gros volume mais qui est loin de K. On appelle Π cette projection qui est 1-lipschitzienne et $C_k(x)$ cet ensemble qui vérifie :

$$d\big(C_k(x), K\big) > 0 \quad \text{et} \quad \left|A_k(x)\backslash C_k(x)\right| \leqslant cC_N 2^{-kN}.$$

Notons $\Theta_k(x) = G_k(x) \cap (2G_{k+1}(x)) \cap C_k(x) \cap (2C_{k+1}(x))$. On obtient :

$$\left|A_k(x)\backslash\Theta_k(x)\right| \leqslant \gamma 2^{-kN} + \gamma 2^{-kN} + cC_N 2^{-kN} + cC_N 2^{-kN} \leqslant cC_N^{1/m} 2^{-kN}. \tag{2.14}$$

Pour tout borélien borné O, on note

$$m(O,U) = \frac{1}{|O|}\int_O U$$

ou $m(O)$ s'il n'y a pas d'ambiguité. Grâce à (2.13),

$$\begin{aligned}\bigl|m\bigl(\Theta_k(x)\bigr)-m\bigl(G_k(x)\bigr)\bigr| &\leqslant \frac{1}{|\Theta_k(x)||G_k(x)|}\int\limits_{\Theta_k(x)\times G_k(x)}\bigl|U(y)-U(z)\bigr|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &\leqslant \frac{c2^{km}}{|\Theta_k(x)||G_k(x)|}\int\limits_{\Theta_k(x)\times G_k(x)}\int\limits_{A_k(x)}|\nabla U|\\ &\leqslant c2^{km}\int\limits_{A_k(x)}|\nabla U|. \end{aligned}\tag{2.15}$$

Et par un calcul analogue,

$$\left|m\left(\frac{1}{2}\Theta_k(x)\right)-m\bigl(G_{k+1}(x)\bigr)\right|\leqslant c2^{km}\int\limits_{A_{k+1}(x)}|\nabla U|.\tag{2.16}$$

On désire à présent estimer $|m(\frac{1}{2}\Theta_k(x))-m(\Theta_k(x))|$.

Pour ce faire prenons une suite de fonctions (f_n) appartenant à $C_0^\infty(B)$ telle que

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} f_n=U \quad \text{dans } \mathbb{L}^1\bigl(\overline{C}_k(x)\cup\overline{C}_{k+1}(x)\bigr),\\ &\lim_{n\to\infty} \nabla f_n=\nabla U \quad \text{dans } \mathbb{L}^1\bigl(\overline{C}_k(x)\cup\overline{C}_{k+1}(x)\bigr);\end{aligned}$$

on a

$$\left|m\bigl(\Theta_k(x),\,f_n\bigr)-m\left(\frac{1}{2}\Theta_k(x),\,f_n\right)\right|\leqslant\frac{1}{|\Theta_k(x)|}\int\limits_{\Theta_k(x)}\left|f_n(y)-f_n\left(\frac{1}{2}y\right)\right|\mathrm{d}y$$

et

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Theta_k(x)}\left|f_n(y)-f_n\left(\frac{1}{2}y\right)\right|\mathrm{d}y &\leqslant \int\limits_{2^{-k}}^{2^{-k+1}}\int\limits_{\Pi(\Theta_k(x))}\left|f_n(rs)-f_n\left(\frac{1}{2}rs\right)\right|r^m\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r\\ &\leqslant \int\limits_{2^{-k}}^{2^{-k+1}}\int\limits_{\Pi(\Theta_k(x))}r^m\left(\int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k+1}}\bigl|\nabla f_n(\rho s)\bigr|\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r\\ &\leqslant c2^{-k}\int\limits_{C_k(x)\cup C_{k+1}(x)}|\nabla f_n|,\end{aligned}$$

d'où puisque par (2.14) on a pour tout k, $|\Theta_k(x)|\geqslant c2^{-kN}$,

$$\left|m\bigl(\Theta_k(x),\,f_n\bigr)-m\left(\frac{1}{2}\Theta_k(x),\,f_n\right)\right|\leqslant c2^{km}\int\limits_{C_k(x)\cup C_{k+1}(x)}|\nabla f_n|.$$

Finalement par passage à la limite en n,

$$\left|m\left(\frac{1}{2}\Theta_k(x),U\right)-m\big(\Theta_k(x),U\big)\right|\leqslant c2^{km}\int\limits_{A_k(x)\cup A_{k+1}(x)}|\nabla U|,\tag{2.17}$$

puis par (2.15), (2.16) et (2.17),

$$\big|m\big(G_k(x)\big)-m\big(G_{k+1}(x)\big)\big|\leqslant c2^{km}\int\limits_{A_k(x)\cup A_{k+1}(x)}|\nabla U|\tag{2.18}$$

et puisque pour tout y dans $A_k(x)\cup A_{k+1}(x)$ on a :

$$2^{-k-1}\leqslant|y-x|\leqslant 2^{-k+1};$$

on obtient :

$$\big|m\big(G_k(x)\big)-m\big(G_{k+1}(x)\big)\big|\leqslant c\int\limits_{A_k(x)\cup A_{k+1}(x)}|\nabla U|(y)\frac{\mathrm{d}y}{|y-x|^m}.$$

On note $m_k(x)=m(G_k(x))$. Pour p.t. point x de Lebesgue de U dans $B''\backslash H$,

$$\lim_{k\to\infty}m_k(x)=U(x)$$

et donc

$$\big|U(x)-m_k(x)\big|\leqslant\sum_{j\geqslant k}\big|m_j(x)-m_{j+1}(x)\big|\leqslant c\int B|\nabla U|(y)\frac{\mathrm{d}y}{|y-x|^m}.\tag{2.19}$$

On s'intéresse maintenant aux points de $G_k(x)$ dont l'image par U est « proche » de $m_k(x)$ (dans cette démonstration on a juste besoin du cas $k=3$ mais le résultat général nous servira dans la proposition qui suit). Grâce à (2.13),

$$\begin{aligned}\big|G_k(x)\cap\big\{\big|U-m_k(x)\big|>t\big\}\big|&\leqslant\frac{1}{t}\int\limits_{G_k(x)}\big|U-m_k(x)\big|\\&\leqslant\frac{1}{t|G_k(x)|}\int\limits_{G_k(x)}\int\limits_{G_k(x)}\big|U(y)-U(z)\big|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&\leqslant c2^{km}\frac{|G_k(x)|}{t}\int\limits_{A_k(x)}|\nabla U|.\end{aligned}$$

Pour tout x et x' de $B''\backslash H$ on a que $|x-x'|\leqslant 2^{-k} \Rightarrow |A_k(x)\cap A_k(x')|\geqslant 2^{kN}\alpha$, où α est une constante géométrique, et donc en choisissant C_N assez petit on a $|G_k(x)\cap G_k(x')|\geqslant 2^{kN-1}\alpha$,

$$\left|G_k(x)\cap\left\{\left|U-m_k(x)\right|>c'2^{km}\int_{A_k(x)}|\nabla U|\right\}\right|\leqslant\frac{c}{c'}2^{-kN},$$
$$\left|G_k(x')\cap\left\{\left|U-m_k(x')\right|>c'2^{km}\int_{A_k(x')}|\nabla U|\right\}\right|\leqslant\frac{c}{c'}2^{-kN}$$

et en prenant c' assez grand ($c/c'\leqslant\alpha/10$) il existe un point z élément de $G_k(x)\cap G_k(x')$ tel que

$$\left|U(z)-m_k(x)\right|\leqslant c'2^{km}\int_{A_k(x)}|\nabla U|\quad\text{et}\quad\left|U(z)-m_k(x')\right|\leqslant c'2^{km}\int_{A_k(x')}|\nabla U|,$$

donc

$$\left|m_k(x)-m_k(x')\right|\leqslant c2^{km}\int_{A_k(x)\cup A_k(x')}|\nabla U|,$$

notamment

$$\left|m_3(x)-m_3(x')\right|\leqslant c\int_B|\nabla U|$$

et en prenant c_0 assez petit, $|H|$ est assez petit et on peut recouvrir $B''\backslash H$ par un nombre fini, qui ne dépend que de N et de c_0, de boules de rayons 2^{-3} dont les centres appartiennent à $B''\backslash H$ et sont à une distance relative d'au plus 2^{-3}. Ainsi pour tout x et x' de $B''\backslash H$ il suit

$$\left|m_3(x)-m_3(x')\right|\leqslant c\int B|\nabla U|. \tag{2.20}$$

Fixons x_0 appartenant à $B''\backslash H$ et notons $\alpha=m_3(x_0)$. Avec (2.19) et (2.20) il vient pour p.t. point x de $B''\backslash H$,

$$\begin{aligned}\left|U(x)-\alpha\right|&\leqslant\left|U(x)-m_3(x)\right|+\left|\alpha-m_3(x)\right|\leqslant c\int_B|\nabla U|(y)\frac{\mathrm{d}y}{|y-x|^m}+c\int_B|\nabla U|\\&\leqslant c\left(|\nabla U|*\frac{1}{|z|^m}\right)(x)+c\int_B|\nabla U|.\end{aligned}$$

Or pour tout p appartenant à $[2, 2N/(N-2)[$ la convolution envoie $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}^q$ dans $\mathbb{L}^p$ où $q = 2p/(2+p)$ et puisque la fonction $z \mapsto 1/|z|^m$ est dans $\mathbb{L}^q(B)$,

$$\|\overline{U}\|_{\mathbb{L}^p(B'')} \leqslant \left\| c\left(|\nabla U| * \frac{1}{|z|^m}\right)\right\|_{\mathbb{L}^p(B'')} + \left\| c\int_B |\nabla U|\right\|_{\mathbb{L}^p(B'')}$$
$$\leqslant c_p \|\nabla U\|_{\mathbb{L}^2(B)} + c\int_B |\nabla U| \leqslant c_p\|\nabla U\|_{\mathbb{L}^2(B)}$$

ce qui démontre le résultat. □

Remarque 11. Avec les notations de ce théorème si $U \in W^{1,2}(B\backslash K)$, avec $\mathcal{H}^m(K) < c_0$, quelques soient x et x' de $B''\backslash H$ avec $|x - x'| \leqslant 2^{-k}$

$$\left|m_k(x) - m_k(x')\right| \leqslant c2^{km} \int_{A_k(x)\cup A_k(x')} |\nabla U|. \tag{2.21}$$

3. Compacité dans $W^{1,2}(B\backslash K)$

On se sert à présent de ce théorème pour construire la propriété de compacité suivante. Etant donné une suite (U_n) de fonctions admissibles, si la mesure de leur ensemble singulier tend vers 0 et que les énergies sont bornées, à la limite, on obtient bien ce qu'on espère, à savoir une fonction de $W^{1,2}$.

Proposition 12. *Soit $U_n \in W^{1,2}(B\backslash K_n)$.*

On suppose

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^m(K_n) = 0 \quad et \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_B |\nabla U_n|^2 < \infty,$$

alors, il existe une sous-suite $\overline{U}_{\sigma(n)}$ de $\overline{U}_n$ qui converge dans $\mathbb{L}^2(B')$ vers V appartenant à $W^{1,2}(B')$.

Démonstration. D'après le Théorème 10 quitte, à ne regarder que des grandes valeurs de n,

$$\overline{U}_n \in W^{1,2}(B''\backslash\partial H_n), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^m(\partial H_n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} |H_n| = 0, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{B''} \left|\overline{U}_n\right|^p < \infty. \tag{3.22}$$

Il faut déjà prouver que $\overline{U}_n$ admet une sous-suite convergente.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout n supérieur à 2 $|H_n| \leqslant 2^{-n}$. On va utiliser le critére de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $k \geqslant 3$ et $\eta = 2^{-k}$, p appartenant à $]2, 2N/(N-2)[$ et N_0 tels que pour $A = \bigcup_{n \geqslant N_0} H_n$ on ait,

$$|A| \leqslant \eta^{2p/(p-2)}. \tag{3.23}$$

On recouvre $B' \backslash A$ par des boules B_i (pour i dans I_k fini) centrées en x_i, qui n'appartiennent pas à A, et de rayon η avec pour tout $i \neq j$ $|x_i - x_j| \geqslant \eta/4$.

Pour tout i dans I_k notons $B_i' = B_i \cap B'$. Pour tout n et m supérieurs à N_0 on a :

$$\begin{aligned}
\int_{B'} \left|\overline{U}_n - \overline{U}_m\right|^2 &= \int_{B' \backslash A} \left|\overline{U}_n - \overline{U}_m\right|^2 + \int_A \left|\overline{U}_n - \overline{U}_m\right|^2 \\
&\leqslant \sum_{i \in I_k} \int_{B_i' \backslash A} \left|\overline{U}_n - \overline{U}_m\right|^2 + \left(\int_A \left|\overline{U}_n - \overline{U}_m\right|^p\right)^{2/p} |A|^{1-2/p}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

et pour tout i dans I_k

$$\begin{aligned}
\int_{B_i' \backslash A} \left|\overline{U}_n - \overline{U}_m\right|^2 \leqslant c \int_{B_i' \backslash A} \left|\overline{U}_n - m_{k,n}(x_i)\right|^2 + c \int_{B_i' \backslash A} \left|\overline{U}_m - m_{k,m}(x_i)\right|^2 \\
+ c \int_{B_i' \backslash A} \left|m_{k,n}(x_i) - m_{k,m}(x_i)\right|^2,
\end{aligned}$$

où avec les notations du théorème précédent $m_{k,p}(x) = m(G_k(x, \overline{U}_p), \overline{U}_p)$ pour tout x, tout k et tout p et par construction

$$\left|G_k\big(x, \overline{U}_p\big)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|A_k(x_i)\right|. \tag{3.25}$$

Or par (2.18) et par la Remarque 11 (2.21) pour tout entier p et pour p.t. x de $B_i' \backslash H_p$, il vient :

$$\begin{aligned}
\left|\overline{U}_p(x) - m_{k,p}(x_i)\right| &\leqslant \left|\overline{U}_p(x) - m_{k,p}(x)\right| + \left|m_{k,p}(x) - m_{k,p}(x_i)\right| \\
&\leqslant \sum_{j \geqslant k} \left|m_{j,p}(x) - m_{j+1,p}(x)\right| + \left|m_{k,p}(x) - m_{k,p}(x_i)\right| \\
&\leqslant c \sum_{j \geqslant k} 2^{jm} \int_{A_j(x) \cup A_{j+1}(x)} \left|\nabla \overline{U}_p\right| + c 2^{km} \int_{4B_i'} \left|\nabla \overline{U}_p\right| \\
&\leqslant c \sum_{j \geqslant k} 2^{-j} M\big(\left|\nabla \overline{U}_p\right|\big)(x) + c 2^{-k} M\big(\left|\nabla \overline{U}_p\right|\big)(x) \\
&\leqslant c 2^{-k} M\big(\left|\nabla \overline{U}_p\right|\big)(x),
\end{aligned}$$

où M représente l'opérateur maximal de Hardy–Littlewood (voir [8, Chapitre 1]), puis

$$\int_{B_i'\setminus A} |\overline{U}_n - \overline{U}_m|^2 \leqslant c2^{-2k} \int_{B_i'\setminus A} M(|\nabla\overline{U}_n|)^2 + c2^{-2k} \int_{B_i'\setminus A} M(|\nabla\overline{U}_m|)^2 + c|B_i'\setminus A||m_{k,n}(x_i) - m_{k,m}(x_i)|^2.$$

Il suit avec (3.24) que

$$\int_{B'} |\overline{U}_n - \overline{U}_m|^2 \leqslant c2^{-2k} \sum_{i\in I_k}\left(\int_{B_i'\setminus A} M(|\nabla\overline{U}_n|)^2 + \int_{B_i'\setminus A} M(|\nabla\overline{U}_m|)^2\right) + c\sum_{i\in I_k}\left(|B_i'||m_{k,n}(x_i) - m_{k,m}(x_i)|^2\right) + \left(\int_A |\overline{U}_n - \overline{U}_m|^p\right)^{2/p} |A|^{1-2/p}. \tag{3.26}$$

On veut à présent estimer $|m_{k,n}(x_i) - m_{k,m}(x_i)|$.

Soit $k \geqslant 3$ et $i \in I_k$, pour tout p on a :

$$|m_{k,p}(x_i)| \leqslant \frac{1}{|G_k(x_i,\overline{U}_p)|} \int_{G_k(x_i,\overline{U}_p)} |\overline{U}_p| \leqslant |G_k(x_i,\overline{U}_p)|^{-1/2} \left(\int_{G_k(x_i,\overline{U}_p)} |\overline{U}_p|^2\right)^{1/2} \leqslant |G_k(x_i,\overline{U}_p)|^{-1/2}\left(\int_{B'} |\overline{U}_p|^2\right)^{1/2}.$$

Ainsi par (3.22) et (3.25), $(m_{k,p}(x_i))$ est uniformément bornée en p et puisque l'ensemble $J = \bigcup_{k\geqslant 3} I_k$ est dénombrable, quitte à faire une extraction diagonale on obtient pour tout k et tout i :

$$m_{k,p}(x_i) \xrightarrow[p\to\infty]{} l(k,i).$$

Le nombre d'indices i pour lesquels chaque point de B' appartient à B_i' est uniformément majoré par une constante qui ne dépend que de la dimension N (et non de card I_k) et ainsi avec (3.22) et (3.26),

$$\int_{B'} |\overline{U}_n - \overline{U}_m|^2 \leqslant c2^{-2k}\left(\int_{B''} M(|\nabla\overline{U}_n|)^2 + \int_{B''} M(|\nabla\overline{U}_m|)^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_A \left|\overline{U}_n-\overline{U}_m\right|^p\right)^{2/p}|A|^{1-2/p}\\
&+c\sup_{i\in I_k}\left|m_{k,n}(x_i)-m_{k,m}(x_i)\right|^2\sum_{i\in I_k}\left|B_i'\right|\\
\leqslant{}& c2^{-2k}\Big(\big\|M\big(\big|\nabla\overline{U}_n\big|\big)\big\|_{\mathbb{L}^2(B'')}+\big\|M\big(\big|\nabla\overline{U}_m\big|\big)\big\|_{\mathbb{L}^2(B'')}\Big)\\
&+c|A|^{1-2/p}+c\sup_{i\in I_k}\left|m_{k,n}(x_i)-m_{k,m}(x_i)\right|^2
\end{aligned}
$$

et alors, pour n et m plus grands qu'un certain N_1, puisque $(m_{k,p}(x_i))_p$ est de Cauchy, grâce au théorème maximal (voir [8, Chapitre 1]), à l'hypothèse et à (3.23),

$$\int_{B'}\left|\overline{U}_n-\overline{U}_m\right|^2\leqslant c\eta^2+c|A|^{1-2/p}+c\eta^2\leqslant c\eta^2.$$

Prenons k tel que $c\eta^2\leqslant\varepsilon^2$, alors pour tout n et m entiers plus grands que N_1

$$\left\|\overline{U}_n-\overline{U}_m\right\|_{\mathbb{L}^2(B')}\leqslant\varepsilon.$$

Ainsi par le critère de Cauchy, $\overline{U}_n$ admet une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(B')$, notons V sa limite.

Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que $(\nabla\overline{U}_n)$ converge faiblement vers g dans $\mathbb{L}^2(B')$. On notera $g_1,\dots,g_N$ les fonctions coordonnées de g. Il suffit alors de montrer que V appartient à $W^{1,2}(B')$ et que $\nabla V=g$. En fait il suffit de montrer que $\nabla V=g$ sur tout pavé $R=\prod_{j=1}^N I_j$ inclu dans B' où, pour tout j, I_j est un intervalle ouvert. Soit i dans $1,\dots,N$ fixé, notons Π la projection orthogonale sur le $i^{\text{ème}}$ axe de coordonnées. Notons E_n la projection $\Pi(R\cap\partial H_n)$. Par abus de notation on notera $R=I_i\times R'$. On obtient que $\mathcal{H}^m(E_n)\leqslant c\mathcal{H}^m(K_n)$. Soit ϕ appartenant à $C_0^\infty(R)$, on veut montrer que

$$\int_R V\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=-\int_R g_i\phi.$$

Notons $V_y(x)=\overline{U}_n(x,y)$ on remarque que $\overline{U}_n$ appartient à $W^{1,1}(I_i\times(R'\backslash E_n))$ donc pour p.t. y dans $R'\backslash E_n$ $V_y\in W^{1,1}(I_i)$ et

$$V_y'(x)=\frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i}(x,y).$$

Ainsi,

$$\int_{I_i} V_y(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_{I_i} V_y'(x)\phi\,\mathrm{d}x = -\int_{I_i}\phi\frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i}\quad \text{pour p.t. } y\in R'\backslash E_n,$$

d'où

$$\int_R \overline{U}_n\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_{I_i\times(R'\backslash E_n)}\phi\frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i} + \int_{I_i\times E_n}\overline{U}_n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

et

$$\begin{aligned}\int_R V\frac{\partial\phi}{\partial x_i} &= \int_R (V-\overline{U}_n)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \int_{I_i\times(R'\backslash E_n)}\phi\frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i} + \int_{I_i\times E_n}\overline{U}_n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\\ &= \int_R (V-\overline{U}_n)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \int_R\left(g_i - \frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i}\right)\phi + \int_{I_i\times E_n}\left(\overline{U}_n\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \phi\frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i}\right) - \int_R g_i\phi,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\int_R V\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \int_R g_i\phi\right| &\leqslant \left\|V-\overline{U}_n\right\|_{\mathbb{L}^2(B')}\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\|_{\mathbb{L}^2(B')} + \left|\int_R\left(g_i - \frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i}\right)\phi\right|\\ &\quad + \int_{I_i\times E_n}\left|\overline{U}_n\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \phi\frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i}\right|.\end{aligned}$$

On a de plus,

$$\int_{I_i\times E_n}\left|\overline{U}_n\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \phi\frac{\partial\overline{U}_n}{\partial x_i}\right| \leqslant \left\|\nabla\overline{U}_n\right\|_{\mathbb{L}^2(B')}\|\phi\|_{\mathbb{L}^2(I_i\times E_n)} + \left\|\overline{U}_n\right\|_{\mathbb{L}^2(B')}\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\|_{\mathbb{L}^2(I_i\times E_n)}$$

et puisque $|I_i\times E_n|\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$\int_R V\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_R g_i\phi.$$

Et ce pour tout ϕ de $C_0^\infty(R)$, tout pavé $R\subset B'$ et pour tout i de $1,\ldots,n$ ce qui termine la démonstration. □

Remarque 13. On a obtenu de plus la convergence faible de $\nabla\overline{U}_{\sigma(n)}$ vers ∇V.

Nous pouvons à présent travailler avec la fonctionnelle F et utiliser la notion de défaut de quasi-minimalité de l'introduction. A partir de maintenant les résultats présentés et leur démonstration sont fortement inspirés de ceux de [4].

Lemme 14. *Soit $O \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(O)$. Si pour toute boule $\overline{B}_x(r) \subset O$ et toute fonction $g \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(O)$ telle que $f = g$ presque partout sur $O \setminus B_r(x)$*

$$\int_{B_r(x)} |\nabla f|^2 \leqslant \int_{B_r(x)} |\nabla g|^2,$$

alors f est harmonique sur O.

Cette caractérisation classique des fonctions harmoniques est nécessaire pour le théorème de compacité suivant. Il explique comment on peut passer à la limite à l'intérieur de F.

Théorème 15. *Soit U_∞ appartenant à $W^{1,2}(B')$ et soit (U_n, K_n) une suite de couples admissibles sur B ainsi que des constantes c_n tous tels que*

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^m(K_n \cap B) = 0,$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \cap \overline{B}_\rho\big) = \gamma(\rho) \quad \textit{pour p.t. } \rho < 1/2,$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{B_\rho} |\nabla U_n|^2 = \alpha(\rho) \quad \textit{pour p.t. } \rho < 1/2,$$

$$\text{(iv)} \quad \lim_{n\to\infty} \Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_\rho\big) = 0 \quad \textit{pour tout } \rho < 1/2,$$

$$\text{(v)} \quad \lim_{n\to\infty} \overline{U}_n = \lim_{n\to\infty} (U_n - \alpha_n)\mathbf{1}_{B''\setminus H_n} = U_\infty \quad \textit{dans } \mathbb{L}^2(B'),$$

alors U_∞ est harmonique sur B',

$$\alpha(\rho) = \int_{B_\rho} |\nabla U_\infty|^2 \quad \textit{et}$$

Remarque 16. Les conditions (ii) et (iii) signifient juste que $\lim_{n\to\infty} F(U_n, c_n, \overline{B}_\rho) = \alpha(\rho) + \gamma(\rho)$ et que chacun des deux termes de la fonctionnelle convergent.

Démonstration. Commencons par montrer que $\int_{B_\rho} |\nabla U_\infty|^2 \leqslant \alpha(\rho)$ pour p.t. $\rho < 1/2$.

Quitte à extraire une sous-suite de $\overline{U}_n$ on peut supposer que, via la Remarque 13 $(\nabla \overline{U}_n)$ converge faiblement vers ∇U_∞ dans B' et ainsi

$$\text{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2} \quad \int_{B_\rho} |\nabla U_\infty|^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{B_\rho} \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{B_\rho} |\nabla U_n|^2 \leqslant \alpha(\rho).$$

Montrons maintenant que

($\star$) pour p.t. $\rho < 1/2$, pour tout V dans $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B')$ tel que $V = U_\infty$ sur $B' \setminus \overline{B}_\rho$,

$$\int_{B_\rho} |\nabla V|^2 \geqslant \alpha(\rho) + \frac{1}{M}\gamma(\rho),$$

ce qui terminera la preuve grâce au Lemme 14, montrant au passage que $\gamma(\rho) = 0$.

On désire obtenir la convergence presque partout (en ρ) de $F(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_\rho)$,

$$F\big(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}'\big) = \int_{B'} \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2 + c_n \mathcal{H}^m\big(\partial H_n \cap \overline{B}'\big) \leqslant \int_{B''} |\nabla U_n|^2 + c_n c \mathcal{H}^m\big(K_n \cap \overline{B}''\big)$$

(en utilisant le (ii) du Théorème 10),

$$F\big(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}'\big) \leqslant c F\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big). \tag{3.27}$$

Ainsi $(F(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}'))$ est bornée et donc par le théorème de Helly, quitte à extraire une sous-suite, pour

$$\text{p.t. } \rho < \frac{1}{2} \quad F\big(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_\rho\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta(\rho). \tag{3.28}$$

On va montrer ($\star$) par l'absurde en comparant U_n à un compétiteur V_n construit à partir de V, U_n et $\overline{U}_n$. Grâce aux hypothèses et à (3.28) prenons $\rho < 1/2$ tel que

$$\beta \text{ soit continue en } \rho \text{ (ce qui est vrai pour p.t. } \rho \text{ car } \beta \text{ est croissante)}, \tag{3.29}$$

$$F\big(U_n, c_n, \overline{B}_\rho\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha(\rho) + \gamma(\rho), \tag{3.30}$$

$$F\big(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_\rho\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta(\rho), \tag{3.31}$$

$$\forall n \quad \mathcal{H}^m(\partial H_n \cap \partial B_\rho) = 0 \text{ (ce qui est vrai pour p.t. } \rho) \tag{3.32}$$

et supposons que ($\star$) est faux en ρ.

Il existe alors V dans $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B')$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$V = U_\infty \quad \text{sur } B' \setminus \overline{B}_\rho \quad \text{et} \quad \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 \leqslant \alpha(\rho) + \frac{1}{M}\gamma(\rho) - \varepsilon. \tag{3.33}$$

Si on note $\overline{U}_n = (U_n - \alpha_n)\mathbf{1}_{B'' \setminus H_n}$ notons $\widetilde{U}_n = U_n - \alpha_n$, on a :

$$c_n \int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}^m\Big(\overline{\big\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\big\}} \cap \partial B_r\Big)\,\mathrm{d}r \leqslant c_n \Big|\overline{\big\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\big\}} \cap B'\Big|$$

puis par le Théorème 10 et (3.27),

$$c_n \int_0^{1/2} \mathcal{H}^m\Big(\overline{\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\}} \cap \partial B_r\Big)\,\mathrm{d}r \leqslant c_n|H_n| \leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K_n)\big)^{N/(N-1)}$$
$$\leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K_n)\big)^{1/(N-1)} c_n \mathcal{H}^m(K_n)$$
$$\leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K_n)\big)^{1/(N-1)}.$$

Notons pour tout $r < (1/2)\delta_n(r) = \mathcal{H}^m(\overline{\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\}} \cap \partial B_r)$. On obtient donc

$$c_n \int_0^{1/2} \delta_n(r)\,\mathrm{d}r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et quitte à extraire une sous-suite

$$\text{pour p.t. } r < \frac{1}{2} \quad c_n\delta_n(r) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.34}$$

On choisit alors grâce à (3.28), (3.29) et (3.34) $\rho < \rho' < 1/2$ tel que

$$F\big(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta(\rho'), \qquad \beta(\rho') - \beta(\rho) \leqslant \frac{\varepsilon}{4(3+M)},$$
$$\int_{B_{\rho'}\setminus B_\rho} |\nabla V|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{16}, \qquad c_n\delta_n(\rho') \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.35}$$

Soit χ une fonction plateau telle que $\chi = 1$ sur B_ρ, $\chi = 0$ sur $B'\setminus B_\rho$ et soit :

$$V_n = \big(\chi V + (1-\chi)\overline{U}_n\big)\mathbf{1}_{B_{\rho'}} + U_n\mathbf{1}_{B'\setminus B_{\rho'}} \quad \text{et}$$
$$\widetilde{K}_n = \big(K \cap (\overline{B}'\setminus B_{\rho'})\big) \cup \Big(\overline{\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\}} \cap \partial B_{\rho'}\Big) \cup \big(\partial H_n \cap (\overline{B}_{\rho'}\setminus B_\rho)\big). \tag{3.36}$$

Il suit que $\widetilde{K}_n$ est un fermé de B et $(V_n, \widetilde{K}_n)$ est un compétiteur pour (U_n, K_n) dans $B_{\rho'}$.
Notons :

$$E_n = \int_{B_{\rho'}} |\nabla U_n|^2, \qquad \widetilde{E}_n = \int_{B_{\rho'}} \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2 \quad \text{et} \quad \delta E_n = \max\big(\widetilde{E}_n - E_n, M\big(\widetilde{E}_n - E_n\big)\big),$$

on obtient par (1.2),

$$c_n\mathcal{H}^m\big(K_n\setminus\widetilde{K}_n\big) \leqslant Mc_n\mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n\setminus K_n\big) + \delta E_n + \Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big). \tag{3.37}$$

Si $\delta E_n = \widetilde{E}_n - E_n$, l'Éq. (3.37) se reécrit :

$$\begin{aligned}
&c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \backslash \widetilde{K}_n\big) \leqslant M c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n \backslash K_n\big) + \widetilde{E}_n - E_n + \Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big),\\
&F\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant F\big(V_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) + (M-1)c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n \backslash K_n\big) + \Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big).
\end{aligned}$$

Si $\delta E_n = M(\widetilde{E}_n - E_n)$, l'Éq. (3.37) se reécrit :

$$\begin{aligned}
&c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \backslash \widetilde{K}_n\big) \leqslant M c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n \backslash K_n\big) + M\big(\widetilde{E}_n - E_n\big) + \Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big),\\
&M F\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant M F\big(V_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) + (M-1)c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \backslash \widetilde{K}_n\big) + \Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big),\\
&F\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant F\big(V_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) + \frac{M-1}{M} c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \backslash \widetilde{K}_n\big) + \frac{1}{M}\Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big).
\end{aligned}$$

Ainsi dans les deux cas on a :

$$\begin{aligned}
F\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant{}& F\big(V_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) + \frac{M-1}{M} c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \backslash \widetilde{K}_n\big) + (M-1)c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n \backslash K_n\big)\\
&+ \Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big).
\end{aligned}$$

A présent, à l'aide de (3.33) et (3.36), on va estimer des majorants de $\mathcal{H}^m(\widetilde{K}_n \cap \overline{B}_{\rho'})$ et $\widetilde{E}_n$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{\rho'}} |\nabla V_n|^2 &\leqslant \int\limits_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int\limits_{B_{\rho'} \backslash B_\rho} \big[|\nabla\chi|^2 \big|V - \overline{U}_n\big|^2 + \chi^2 |\nabla V|^2 + (1-\chi)^2 \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2\big]\\
&\leqslant \int\limits_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int\limits_{B_{\rho'} \backslash B_\rho} \big[\|\nabla\chi\|_\infty^2 \big|V - \overline{U}_n\big|^2 + |\nabla V|^2 + \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2\big]\\
&\leqslant \int\limits_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int\limits_{B_{\rho'} \backslash B_\rho} \big[c\big|U_\infty - \overline{U}_n\big|^2 + |\nabla V|^2 + \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2\big] \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n \cap \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant \mathcal{H}^m\big(\partial H_n \cap \big(\overline{B}_{\rho'} \backslash \overline{B}_\rho\big)\big) + \delta_n(\rho') \qquad (3.39)$$

et donc on obtient par (3.32), (3.38) et (3.39),

$$\begin{aligned}
F\big(U_n, c_n, \overline{B}_\rho\big) \leqslant{}& \int\limits_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int\limits_{B_{\rho'} \backslash B_\rho} \big[c\big|U_\infty - \overline{U}_n\big|^2 + |\nabla V|^2 + \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2\big]\\
&+ (M-1)c_n \delta_n(\rho') + (M-1)c_n \mathcal{H}^m\big(\partial H_n \cap \big(\overline{B}_{\rho'} \backslash \overline{B}_\rho\big)\big)\\
&+ \frac{M-1}{M} c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \cap \overline{B}_{\rho'}\big) + \Psi_M\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int_{B_{\rho'}\setminus B_\rho} \left[c\left|U_\infty - \overline{U}_n\right|^2 + |\nabla V g|^2\right]\\
&\quad + (3+M)\left(F\left(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\right) - F\left(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_\rho\right)\right) + (M-1)c_n\delta_n(\rho')\\
&\quad + \frac{M-1}{M} c_n \mathcal{H}^m\left(K_n \cap \overline{B}_{\rho'}\right) + \Psi_M\left(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\right),\end{aligned}$$

puis par passage à la limite en n grâce à (3.30), (3.31), (3.33) et (3.35), il vient :

$$\begin{aligned}&\alpha(\rho) + \gamma(\rho) \leqslant \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int_{B_{\rho'}\setminus B_\rho} |\nabla V|^2 + (3+M)\left(\beta(\rho') - \beta(\rho)\right) + \frac{M-1}{M}\gamma(\rho),\\
&\alpha(\rho) + \frac{1}{M}\gamma(\rho) \leqslant \alpha(\rho) + \frac{1}{M}\gamma(\rho) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4},\\
&0 \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

ce qui est impossible, ainsi ($\star$) est vrai ce qui achève la démonstration. □

Nous allons à présent démontrer un résultat similaire en ajoutant la condition topologique de la Définition 7. Nous pouvons énoncer un théorème semblable au Théorème 15.

Théorème 17. *Soit U_∞ appartenant à $W^{1,2}(B')$ et soit (U_n, K_n) une suite de couples admissibles sur B ainsi que des constantes c_n tous tels que*

$$\begin{aligned}&\text{(i)} && \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^m(K_n \cap B) = 0,\\
&\text{(ii)} && \lim_{n\to\infty} c_n \mathcal{H}^m\left(K_n \cap \overline{B}_\rho\right) = \gamma(\rho) \quad \textit{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2},\\
&\text{(iii)} && \lim_{n\to\infty} \int_{B_\rho} |\nabla U_n|^2 = \alpha(\rho) \quad \textit{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2},\\
&\text{(iv)} && \lim_{n\to\infty} \overline{\Psi}_M\left(U_n, c_n, \overline{B}_\rho\right) = 0 \quad \textit{pour tout } \rho < \frac{1}{2},\\
&\text{(v)} && \lim_{n\to\infty} \overline{U}_n = U_\infty \quad \textit{dans } \mathbb{L}^2(B'),\end{aligned}$$

alors U_∞ est harmonique sur B',

$$\alpha(\rho) = \int_{B_\rho} |\nabla U_\infty|^2 \quad \textit{et} \quad \gamma(\rho) = 0 \quad \textit{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Commencons par montrer que $\int_{B_\rho} |\nabla U_\infty|^2 \leqslant \alpha(\rho)$ pour p.t. $\rho < 1/2$. Quitte à extraire une sous-suite de $\overline{U}_n$ on peut supposer que $(\nabla \overline{U}_n)$ converge faiblement vers ∇U_∞ dans B' et ainsi

$$\text{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2} \quad \int_{B_\rho} |\nabla U_\infty| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{B_\rho} \left|\nabla \overline{U}_n\right|^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{B_\rho} |\nabla U_n|^2 \leqslant \alpha(\rho).$$

Montrons maintenant,

($\star$) pour p.t. $\rho < 1/2$, pour tout V dans $W^{1,2}(B')$ tel que $V = U_\infty$ sur $B' \backslash \overline{B}_\rho$

$$\int_{B_\rho} |\nabla V|^2 \geqslant \alpha(\rho) + \frac{1}{M}\gamma(\rho),$$

ce qui terminera la démonstration en utilisant le Lemme 14.

On désire obtenir la convergence presque partout (en ρ) de $F(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_\rho)$,

$$F\left(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}'\right) = \int_{B'} \left|\nabla \overline{U}_n\right|^2 + c_n \mathcal{H}^m\left(\partial H_n \cap \overline{B'}\right) \leqslant \int_{B''} |\nabla U_n|^2 + c_n c \mathcal{H}^m\left(K_n \cap \overline{B}''\right),$$

puis

$$F\left(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}'\right) \leqslant c F\left(U_n, c_n, \overline{B}''\right). \tag{3.40}$$

Ainsi $(F(\overline{U}_n, c_n, \overline{B'}))$ est bornée et donc par le théorème de Helly quitte à extraire une sous-suite,

$$\text{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2} \quad F\left(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_\rho\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta(\rho). \tag{3.41}$$

On va montrer ($\star$) par l'absurde en comparant U_n à un compétiteur topologique V_n construit à partir de V, U_n et $\overline{U}_n$. Grâce aux hypothèses et à (3.41) prenons $\rho < 1/2$ tel que

$$\beta \text{ soit continue en } \rho \text{ (ce qui est vrai pour p.t. } \rho \text{ car } \beta \text{ est croissante)}, \tag{3.42}$$

$$F\left(U_n, c_n, \overline{B_\rho}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha(\rho) + \gamma(\rho), \tag{3.43}$$

$$F\left(\overline{U}_n, c_n, \overline{B_\rho}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta(\rho), \tag{3.44}$$

$$\forall n \quad \mathcal{H}^m(\partial H_n \cap \partial B_\rho) = 0 \quad \text{(ce qui est vrai pour p.t. } \rho) \tag{3.45}$$

et supposons que ($\star$) est faux en ρ. Il existe V dans $W^{1,2}(B')$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$V = U_\infty \quad \text{sur } B' \backslash \overline{B}_\rho \quad \text{et} \quad \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 \leqslant \alpha(\rho) + \frac{1}{M}\beta(\rho) - \varepsilon. \tag{3.46}$$

Si on note $\overline{U}_n = (U_n - \alpha_n)\mathbf{1}_{B'' \backslash H_n}$ notons $\widetilde{U}_n = U_n - \alpha_n$. On a par le Théorème 10 et (3.40),

$$\begin{aligned} c_n \int_0^{1/2} \mathcal{H}^m\Big(\overline{\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\}} \cap \partial B_\rho\Big)\,\mathrm{d}\rho &= c_n \Big|\overline{\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\}} \cap B'\Big| \leqslant c_n |H_n| \leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K_n)\big)^{N/(N-1)} \\ &\leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K_n)\big)^{1/(N-1)} c_n \mathcal{H}^m(K_n) \leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K_n)\big)^{1/(N-1)}. \end{aligned}$$

Notons $\delta_n(\rho) = \mathcal{H}^m(\overline{\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\}} \cap \partial B_\rho)$. On obtient donc,

$$c_n \int_0^{1/2} \delta_n(\rho)\,\mathrm{d}\rho \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et quitte à extraire une sous-suite,

$$\text{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2} \quad c_n \delta_n(\rho) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.47}$$

Par ailleurs

$$\mathcal{H}^m\big(K_n \cap \overline{B}'' \backslash B'\big) \geqslant \int_{1/2}^{3/4} \mathcal{H}^{N-2}(K_n \cap \partial B_\rho)\,\mathrm{d}\rho$$

et ainsi par l'inégalité de Tchebytchev,

$$\Big|\big\{\rho \in \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right[\;\big|\; \mathcal{H}^{N-2}(K_n \cap \partial B_\rho) > 10\mathcal{H}^m(K_n)\big\}\Big| \leqslant \tfrac{1}{10},$$

donc il existe $1/2 < \rho_n < 3/4$ tel que $\mathcal{H}^{N-2}(K_n \cap \partial B_{\rho_n}) \leqslant 10\mathcal{H}^m(K_n)$. Notons L_n le fermé de ∂B_{ρ_n} qui a $K_n \cap \partial B_{\rho_n}$ pour bord, par l'inégalité isopérimétrique on a :

$$\begin{aligned} c_n \mathcal{H}^m(L_n) &\leqslant c_n\big(\mathcal{H}^{N-2}(K_n \cap \partial B_{\rho_n})\big)^{(N-1)/(N-2)} \leqslant c c_n\big(\mathcal{H}^m(K_n)\big)^{(N-1)/(N-2)} \\ &\leqslant c\big(\mathcal{H}^m(K_n)\big)^{1/(N-2)} \end{aligned}$$

et ainsi

$$\lim_{n\to\infty} c_n \mathcal{H}^m(L_n) = 0. \tag{3.48}$$

On choisit alors grâce à (3.41), (3.42) et (3.47) $\rho < \rho' < 1/2$ tel que

$$F\big(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta(\rho'), \qquad \beta(\rho') - \beta(\rho) \leqslant \frac{\varepsilon}{4(3+M)},$$
$$\int_{B_{\rho'}\backslash B_\rho} |\nabla V|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{16}, \qquad c_n \delta_n(\rho') \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.49}$$

Soit χ une fonction plateau telle que $\chi = 1$ sur B_ρ, $\chi = 0$ sur $B'\backslash B_{\rho'}$ et soit :

$$V_n = \big(\chi V + (1-\chi)\overline{U}_n\big)\mathbf{1}_{B_{\rho'}} + U_n \mathbf{1}_{B'\backslash B_{\rho'}} \quad \text{et}$$
$$\widetilde{K}_n = \big(K \cap \big(\overline{B}'\backslash B_{\rho'}\big)\big) \cup \Big(\overline{\big\{\overline{U}_n \neq \widetilde{U}_n\big\}} \cap \partial B_{\rho'}\Big) \cup L_n \cup \big(\partial H_n \cap \big(\overline{B}_{\rho'}\backslash B_\rho\big)\big); \tag{3.50}$$

$\widetilde{K}_n$ est un fermé de B. Montrons que V_n est un compétiteur topologique pour U_n dans B'. Il est clair que V_n est un compétiteur pour U_n dans B', il suffit donc de vérifier qu'il est bien topologique. Puisque $\partial B_{\rho_n}\backslash \widetilde{K}_n$ est inclu dans une seule composante connexe de $B\backslash K$, d'après le Lemme 20.10 de [3] V_n est un compétiteur topologique pour U_n dans B_{ρ_n} et donc a fortiori dans B''.

On remarque qu'à l'ensemble L_n près, K_n et $\widetilde{K}_n$ ne différent que sur $\overline{B}_{\rho'}$, de même V_n et U_n ne différent que sur $\overline{B}_{\rho'}$.

Notons

$$E_n = \int_{B''} |\nabla U_n|^2, \quad \widetilde{E}_n = \int_{B''} \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2 \quad \text{et} \quad \delta E_n = \max\big(\widetilde{E}_n - E_n, M\big(\widetilde{E}_n - E_n\big)\big),$$

on obtient par (1.2) :

$$c_n \mathcal{H}^m\big(K_n\backslash \widetilde{K}_n\big) \leqslant M c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n\backslash K_n\big) + \delta E_n + \overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big). \tag{3.51}$$

Si $\delta E_n = \widetilde{E}_n - E_n$, l'Éq. (3.51) se reécrit :

$$c_n \mathcal{H}^m\big(K_n\backslash \widetilde{K}_n\big) \leqslant M c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n\backslash K_n\big) + \widetilde{E}_n - E_n + \overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big),$$
$$F\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant F\big(V_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) + (M-1)c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n\backslash K_n\big) + \overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big).$$

Si $\delta E_n = M(\widetilde{E}_n - E_n)$, l'Éq. (3.51) se reécrit :

$$c_n \mathcal{H}^m\big(K_n\backslash \widetilde{K}_n\big) \leqslant M c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n\backslash K_n\big) + M\big(\widetilde{E}_n - E_n\big) + \overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big),$$
$$M F\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant M F\big(V_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) + (M-1)c_n \mathcal{H}^m\big(K_n\backslash \widetilde{K}_n\big) + \overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big),$$
$$F\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant F\big(V_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) + \frac{M-1}{M} c_n \mathcal{H}^m\big(K_n\backslash \widetilde{K}_n\big) + \frac{1}{M}\overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big).$$

Ainsi dans les deux cas on a :

$$\begin{aligned}F\big(U_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant{}& F\big(V_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) + \frac{M-1}{M} c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \backslash \widetilde{K}_n\big) \\ &+ (M-1) c_n \mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n \backslash K_n\big) + \overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big).\end{aligned}$$

A présent à l'aide de (3.45) et (3.50) on va estimer des majorants de $\mathcal{H}^m(\widetilde{K}_n \cap \overline{B}_{\rho'})$ et $\int_{B_{\rho'}} |\nabla V_n|^2$;

$$\begin{aligned}\int_{B_{\rho'}} |\nabla V_n|^2 &\leqslant \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int_{B_{\rho'}\backslash B_\rho} \big[|\nabla \chi|^2 \big|V - \overline{U}_n\big|^2 + \chi^2 |\nabla V|^2 + (1-\chi)^2 \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2\big] \\ &\leqslant \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int_{B_{\rho'}\backslash B_\rho} \big[\|\nabla \chi\|_\infty^2 \big|V - \overline{U}_n\big|^2 + |\nabla V|^2 + \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2\big] \\ &\leqslant \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int_{B_{\rho'}\backslash B_\rho} \big[c \big|U_\infty - \overline{U}_n\big|^2 + |\nabla V|^2 + \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2\big] \qquad (3.52)\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n \cap \overline{B}_{\rho'}\big) \leqslant \mathcal{H}^m\big(\partial H_n \cap \big(\overline{B}_{\rho'} \backslash \overline{B}_\rho\big)\big) + \delta_n(\rho'), \qquad (3.53)$$

et donc on obtient par (3.46), (3.52) et (3.53),

$$\begin{aligned}F\big(U_n, c_n, \overline{B}_\rho\big) \leqslant{}& \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int_{B_{\rho'}\backslash B_\rho} \big[c\big|U_\infty - \overline{U}_n\big|^2 + |\nabla V|^2 + \big|\nabla \overline{U}_n\big|^2\big] \\ &+ (M-1) c_n \delta_n(\rho') + (M-1) c_n \mathcal{H}^m\big(\partial H_n \cap \big(\overline{B}_{\rho'} \backslash B_\rho\big)\big) \\ &+ (M-1) c_n \mathcal{H}^m(L_n) + \frac{M-1}{M} c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \cap \overline{B}_{\rho'}\big) + \overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big) \\ \leqslant{}& \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int_{B_{\rho'}\backslash B_\rho} \big[c\big|U_\infty - \overline{U}_n\big|^2 + |\nabla V|^2\big] + (M-1) c_n \delta_n(\rho') \\ &+ (3+M)\big(F\big(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_{\rho'}\big) - F\big(\overline{U}_n, c_n, \overline{B}_\rho\big)\big) \\ &+ (M-1) c_n \mathcal{H}^m(L_n) + \frac{M-1}{M} c_n \mathcal{H}^m\big(K_n \cap \overline{B}_{\rho'}\big) + \overline{\Psi}_M\big(U_n, c_n, \overline{B}''\big),\end{aligned}$$

puis par passage à la limite en n grâce à (3.43), (3.44), (3.46), (3.48) et (3.49),

$$\alpha(\rho) + \gamma(\rho) \leqslant \int_{B_\rho} |\nabla V|^2 + 4 \int_{B_{\rho'}\backslash B_\rho} |\nabla V|^2 + (3+M)\big(\beta(\rho') - \beta(\rho)\big) + \frac{M-1}{M} \gamma(\rho),$$

$$\alpha(\rho)+\frac{1}{M}\gamma(\rho)\leqslant\alpha(\rho)+\frac{1}{M}\gamma(\rho)-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4},$$
$$0\leqslant-\frac{\varepsilon}{2};$$

ce qui est impossible, ainsi ($\star$) est vrai ce qui finit la démonstration. □

4. Décroissance de la densité de la fonctionnelle

On va montrer des résultats identiques pour les quasi-minima qu'ils soient topologiques ou non ; c'est pourquoi on introduit $\widetilde{\Psi}_M$ qui représente à la fois Ψ_M et $\overline{\Psi}_M$.

Le théorème suivant nous permet de voir que, si le défaut de quasiminimalité de la fonctionnelle réduite est suffisamment petit dans une certaine boule, la densité de la fonctionnelle est décroissante dans les boules plus petites de même centre.

Théorème 18. *Pour tout α de $]0,1/3[$ et tout β de $]0,1[$, il existe deux nombres strictement positifs ε et θ tels que si $\overline{B}_\rho(x)\subset\Omega$, U appartient à $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash K)$ avec,*

$$\mathcal{H}^m\big(K\cap\overline{B}_\rho(x)\big)\leqslant\varepsilon\rho^m\quad et\quad\widetilde{\Psi}_M\big(U,\overline{B}_\rho(x)\big)\leqslant\theta F\big(U,\overline{B}_\rho(x)\big),$$

alors

$$F\big(U,\overline{B}_{\alpha\rho}(x)\big)\leqslant 3^N\alpha^{m+\beta}F\big(U,\overline{B}_\rho(x)\big).$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde.

Il existe deux nombres $\alpha\in\,]0,1/3[$ et $\beta\in\,]0,1[$, deux suites (ε_n) et (θ_n) tendant vers 0, une suite $U_n\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash K_n)$ et une suite $\overline{B}_{\rho_n}(x_n)\subset\Omega$ tous tels que

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^m\big(K_n\cap\overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big)\leqslant\varepsilon_n\rho_n^m,\\&\widetilde{\Psi}_M\big(U_n,\overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big)\leqslant\theta_nF\big(U_n,\overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big),\\&F\big(U_n,\overline{B}_{\alpha\rho_n}(x_n)\big)>3^N\alpha^{m+\beta}F\big(U_n,\overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big).\end{aligned}\tag{4.54}$$

On renormalise toutes ces équations pour être dans B. Soit :

$$f_n=\rho_n^{-m}F\big(U_n,\overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big)\quad\text{et}\quad V_n(y)=(\rho_nf_n)^{-1/2}U_n(x_n+\rho_ny)\quad\text{pour } y\in B.$$

On obtient que V_n appartient à $W^{1,2}(B\backslash\widetilde{K}_n)$ où $\widetilde{K}_n=\rho_n^{-1}(K_n-x_n)$. On a par (4.54) que $\mathcal{H}^m(\widetilde{K}_n\cap\overline{B})\leqslant\varepsilon_n$, donc

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n\cap\overline{B}\big)=0.\tag{4.55}$$

On obtient de même

$$F\big(V_n,f_n^{-1},\overline{B}\big)=\rho_n^{-m}f_n^{-1}F\big(U_n,\overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big)=1\quad\text{et}\tag{4.56}$$

$$\widetilde{\Psi}_M\big(V_n, f_n^{-1}, \overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big) \leqslant \theta_n \rho_n^{-m} f_n^{-1} F\big(U_n, \overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big) \leqslant \theta_n. \tag{4.57}$$

Les applications $\rho \mapsto f_n^{-1}\mathcal{H}^m(\widetilde{K}_n \cap \overline{B}_\rho)$ et $\rho \mapsto \int_{B_\rho} |\nabla V_n|^2$ étant croissantes et bornées par (4.56), quitte à se restreindre à une sous-suite, on peut supposer par le théorème de Helly que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{-1}\mathcal{H}^m\big(\widetilde{K}_n \cap \overline{B}_\rho\big) = \gamma(\rho) \quad \text{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2}, \tag{4.58}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_\rho} |\nabla V_n|^2 = \alpha(\rho) \quad \text{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2}. \tag{4.59}$$

L'application $\rho \mapsto \widetilde{\Psi}_M(V_n, f_n^{-1}, \overline{B}_\rho)$ étant elle aussi croissante, par (4.57),

$$\forall \rho < \frac{1}{2} \quad \lim_{n\to\infty} \widetilde{\Psi}_M\big(V_n, f_n^{-1}, \overline{B}_\rho\big) = 0. \tag{4.60}$$

D'après la Proposition 12,

$$\overline{V}_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}^2(B')} V_\infty \quad \text{où } V_\infty \text{ appartient à } W^{1,2}(B'). \tag{4.61}$$

Ainsi d'après les Théorèmes 15 et 17 applicables par (4.55), (4.58), (4.59), (4.60) et (4.61) V_∞ est harmonique sur B', $\gamma \equiv 0$ et

$$\alpha(\rho) = \int_{B_\rho} |\nabla V_\infty|^2 \quad \text{pour p.t. } \rho < \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} F\big(V_n, f_n^{-1}, \overline{B}_\alpha\big) \leqslant \int_{B_\alpha} |\nabla V_\infty|^2. \tag{4.62}$$

Or puisque V_∞ est harmonique sur B'

$$\int_{B_\alpha} |\nabla V_\infty|^2 \leqslant (3\alpha)^N \int_{B/3} |\nabla V_\infty|^2. \tag{4.63}$$

Par ailleurs par (4.54)

$$F\big(V_n, f_n^{-1}, \overline{B}_\alpha\big) = \rho_n^{-m} f_n^{-1} F\big(U_n, \overline{B}_{\alpha\rho_n}(x_n)\big) > 3^N \alpha^{m+\beta} M$$

et donc

$$3^N\alpha^{m+\beta} \leqslant 3^N\alpha^N \int\limits_{B/3} |\nabla V_\infty|^2. \tag{4.64}$$

Or d'après (4.56) ainsi que les Théorèmes 15 et 17

$$\int\limits_{\frac{1}{3}B} |\nabla V_\infty|^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} F\big(V_n, f_n^{-1}, \tfrac{1}{3}\overline{B}\big) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F\big(V_n, f_n^{-1}, \overline{B}\big) \leqslant 1.$$

Il suit de (4.64) que $\alpha^\beta \leqslant \alpha$ ce qui est impossible car $\alpha < 1$. $\square$

A partir du théorème précédent on construit un lemme technique de décroissance.

Lemme 19. *Pour tout $M \geqslant 1$, β de $]0,1/2[$, α de $]0,3^{-N\beta^{-1}}[$ et pour tout U appartenant à $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash K)$ un (r_0, M, a)-quasi-minimum.*

Soit $\alpha' \in\,]0,1/3[$ tel que $3^N M_a(\alpha')^{2\beta} \leqslant \varepsilon(\alpha, 2\beta)$ (où M_a provient de la Remarque 8). *On note $\theta_0 = \min(\theta(\alpha,2\beta), \theta(\alpha',2\beta))$, $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon(\alpha,2\beta), \varepsilon(\alpha',2\beta))$ et $\alpha_0 = \min(\alpha,\alpha')$. Soit $\sigma \in\,]0,\varepsilon_0[$, soit $\overline{B}_\rho(x) \subset \Omega$ avec $\rho < r_0$,*

$$\textit{si} \quad \mathcal{H}^m\big(K\cap \overline{B}_\rho(x)\big) \leqslant \varepsilon(\alpha',2\beta)\rho^m \quad \textit{et} \quad \widetilde{\Psi}_M\big(U, \overline{B}_t(x)\big) \leqslant \sigma\theta_0(\alpha_0 t)^m \quad \textit{pour tout } t\leqslant \rho,$$

alors pour tout entier n

$$F\big(U, \overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}(x)\big) \leqslant \max\big(\varepsilon(\alpha,2\beta)\alpha^{\beta n}, \sigma\big)(\alpha'\alpha^n\rho)^m. \tag{4.65}$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur n.

• Pour $n=0$. Si $F(U,\overline{B}_\rho(x)) \leqslant \sigma(\alpha'\rho)^m$, alors $F(U,\overline{B}_{\alpha'\rho}(x)) \leqslant \sigma(\alpha'\rho)^m$. Sinon $F(U,\overline{B}_\rho(x)) > \sigma(\alpha'\rho)^m$ et puisque $\widetilde{\Psi}_M(U,\overline{B}_\rho(x)) \leqslant \sigma\theta_0(\alpha'\rho)^m$ on obtient :

$$\widetilde{\Psi}_M\big(U,\overline{B}_\rho(x)\big) \leqslant \theta(\alpha',2\beta)F\big(U,\overline{B}_\rho(x)\big),$$

d'où par le lemme précédent et la Remarque 8,

$$F\big(U,\overline{B}_{\alpha'\rho}(x)\big) \leqslant (\alpha')^{m+2\beta}3^N F\big(U,\overline{B}_\rho(x)\big) \leqslant (\alpha')^{m+2\beta}3^N M_a\rho^m \leqslant \varepsilon(\alpha,2\beta)(\alpha'\rho)^m,$$

ce qui montre la propriété à l'ordre 0.

• On suppose la propriété acquise à l'ordre n.

• Montrons la propriété à l'ordre $n+1$.

Si $F(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}(x)) \leqslant \sigma(\alpha'\alpha^{n+1}\rho)^m$, alors $F(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^{n+1}\rho}(x)) \leqslant \sigma(\alpha'\alpha^{n+1}\rho)^m$.

Sinon $F(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}(x)) > \sigma(\alpha'\alpha^{n+1}\rho)^m$ puisque $\widetilde{\Psi}_M(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}(x)) \leqslant \sigma\theta_0(\alpha_0\alpha'\alpha^n\rho)^m$ il vient :

$$\widetilde{\Psi}_M\big(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^{n+1}\rho}(x)\big) \leqslant \theta(\alpha,2\beta)F\big(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}(x)\big).$$

Comme

$$\mathcal{H}^m\big(K\cap \overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}(x)\big)\leqslant F\big(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}(x)\big)\leqslant \varepsilon(\alpha,2\beta)(\alpha'\alpha^n\rho)^m$$

on obtient par le lemme précédent et la Remarque 8,

$$\begin{aligned}F\big(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^{n+1}\rho}(x)\big)&\leqslant 3^N\alpha^{m+2\beta}F\big(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}(x)\big)\\&\leqslant 3^N\alpha^{m+2\beta}\max\big(\varepsilon(\alpha,2\beta)\alpha^{n\beta},\sigma\big)\cdot(\alpha'\alpha^n\rho)^m\\&\leqslant\big(\alpha^\beta 3^N\big)\alpha^\beta\max\big(\varepsilon(\alpha)\alpha^{n\beta},\sigma\big)\big(\alpha'\alpha^{n+1}\rho\big)^m\\&\leqslant\max\big(\varepsilon(\alpha)\alpha^{(n+1)\beta},\sigma\big)\big(\alpha'\alpha^{n+1}\rho\big)^m,\end{aligned}$$

ce qui montre la propriété à l'ordre $n+1$. La propriété est donc vérifiée pour tout entier n. □

5. Ahlfors regularité d'un quasi-minimum

Nous allons utiliser le résultat de densité suivant où $C_{(m)}$ est la même constante que dans (2.12).

Lemme 20. *Soit $K\subset\mathbb{R}^N$ un borélien tel que $\mathcal{H}^m(K)<+\infty$ alors,*

$$\limsup_{r\to 0} r^{-m}\mathcal{H}^m\big(K\cap B_r(x)\big)\geqslant\frac{C_{(m)}}{2}\quad \textit{pour } \mathcal{H}^m\textit{-presque tout } x\in K.$$

Nous sommes à présent à même de démontrer qu'un (r_0,M,a)-quasi-minimum (topologique ou non) est Ahlfors régulier dès qu'il est réduit (voir la Définition 3).

Théorème 21. *Pour tout $M\geqslant 1$ il existe $a>0$ tel que pour U un (r_0,M,a)-quasi-minimum réduit, il existe une constante c ne dépendant que de (r_0,M,a) telle que dès que $\overline{B}_\rho(x)\subset\Omega$ avec $\rho<r_0$ et $x\in K$,*

$$c\rho^m\leqslant\mathcal{H}^m\big(K\cap\overline{B}_\rho(x)\big)\leqslant c^{-1}\rho^m.$$

Démonstration. L'inégalité de droite est déjà acquise grâce à la Remarque 8. On veut donc démontrer celle de gauche. Fixons $\alpha\in\,]0,1/(3^NM)[$, soit α' comme dans le lemme précédent (pour $a=1$ ce qui n'est pas génant car $a\mapsto M_a$ est croissante) et $c=\varepsilon(\alpha',1/2)$.

Avec les notations du théorème précédent, prenons $a\leqslant\sigma\theta_0\alpha_0^m$ où σ est à préciser. Soit x appartenant à K, $\rho<r_0$ et $\overline{B}_\rho(x)\subset\Omega$. Si $\mathcal{H}^m(K\cap\overline{B}_\rho(x))\leqslant c\rho^m$, d'après le Lemme 19, dès que n est suffisamment grand pour que $\varepsilon(\alpha,1/2)\alpha^{n/4}\leqslant\sigma$,

$$F\big(U,\overline{B}_{\alpha'\alpha^n\rho}\big)\leqslant\sigma(\alpha'\alpha^n\rho)^m$$

et donc

$$\limsup_{r\to 0} r^{-m} F\big(U, \overline{B}_r(x)\big) \leqslant \sigma\alpha^{-m}.$$

Prenons $\sigma \leqslant C_{(m)}/4\alpha^m$ alors par le Lemme 20, pour

$$A = \big\{x \in K \,\big|\, \exists\rho < r_0 \text{ tel que } \overline{B}_\rho(x) \subset \Omega \text{ et } \mathcal{H}^m\big(K \cap \overline{B}_\rho(x)\big) \leqslant c\rho^m\big\},$$

il vient,

$$\mathcal{H}^m(A) = 0.$$

Le résultat est donc acquis si x appartient à $K\backslash A$.

Supposons que $A \neq \emptyset$. Soit x appartenant à A.

• Supposons qu'il existe une suite (x_n) de $K\backslash A$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Soit $\rho < \rho_0$ tel que $\overline{B}_\rho(x) \subset \Omega$. Il existe une suite (ρ_n) telle que pour tout n $\rho_n < \rho$, $\overline{B}_{\rho_n}(x_n) \subset \overline{B}_\rho(x)$ et $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho$ alors,

$$\mathcal{H}^m\big(K \cap \overline{B}_\rho(x)\big) \geqslant \mathcal{H}^m\big(K \cap \overline{B}_{\rho_n}(x_n)\big) \geqslant c\rho_n^m,$$

puis par passage à la limite

$$\mathcal{H}^m\big(K \cap \overline{B}_\rho(x)\big) \geqslant c\rho^m$$

et ainsi x appartient à A ce qui est impossible.

• Sinon il existe $\rho < \rho_0$ tel que $\overline{B}_\rho(x) \cap (K\backslash A) = \{x\}$. Ce qui est impossible car K est réduit et ainsi $A = \emptyset$ ce qui termine la démonstration. □

6. Etude pour une famille plus large de fonctionnelles

On s'intéresse à des fonctionnelles plus générales que celle de Mumford–Shah dans laquelle on ne considére plus la norme $\mathbb{L}^2$ du gradient de U mais la norme $\mathbb{L}^1$ d'une fonction f qui dépend du point courant et du gradient de U. L'introduction de cette fonction f permet de considérer l'ensemble des quasi-minima comme stable par changements de variables (C^1) appliqués à U. Dans toute cette partie on considère donc la fonctionnelle :

$$F_f(U, c, \omega) = \int_{\omega\backslash K} f\big(x, \nabla U(x)\big)\,\mathrm{d}x + c\mathcal{H}^{N-1}(K \cap \omega),$$

où f vérifie

$$c^{-1}|Z|^2 \leqslant f(x, Z) \leqslant c|Z|^2 \quad \text{pour tous } x \text{ et } Z, \tag{6.66}$$

$$f \text{ est de classe } C^2 \quad \text{par rapport à } Z, \tag{6.67}$$

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial Z_\alpha \partial Z_\beta}(x, Z)\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta \geqslant c|\varepsilon|^2 \quad \text{pour tous } \varepsilon \in \mathbb{R}^N, \tag{6.68}$$

$$\big|f(x,Z)-f(y,Z)\big|\leqslant |Z|^2\omega\big(|x-y|\big), \tag{6.69}$$

où ω est une fonction continue, croissante et bornée et où $\omega(0)=0$.

La condition (6.66) signifie que $f(x,\nabla U)$ est comparable à $|\nabla U|^2$, les conditions (6.67) et (6.69) donnent la régularité nécessaire à f, enfin la condition (6.68) est une condition d'éllipticité.

On désire démontrer que, pour une notion de quasi-minimum (topologique ou non) analogue à celle de la fonctionnelle de Mumford–Shah mais où on a remplacé $|\nabla U|^2$ par $f(x,\nabla U)$ (on notera $\Psi_{M,f}$ à la place de Ψ_M), le Théorème 2 est encore vrai, à savoir

Théorème 22. *Pour tout $M\geqslant 1$ il existe $a>0$ tel que pour U un (r_0,M,a)-quasi-minimum réduit de F_f, il existe une constante c ne dépendant que de (r_0,M,a) telle que*

$$\textit{pour } \overline{B}_\rho(x)\subset\Omega \quad \textit{avec } \rho<r_0 \textit{ et } x\in K$$

$$c\rho^m\leqslant \mathcal{H}^m\big(K\cap\overline{B}_\rho(x)\big)\leqslant c^{-1}\rho^m. \tag{6.70}$$

Voici une esquisse de la démonstration. En fait dans la majorité des résultats on peut remplacer tel quel $\int_*|\nabla U|^2$ par $\int_* f(x,\nabla U)$. Des différences n'apparaissent qu'à partir du Théorème 15 qui s'adapte comme suit à notre nouvelle fonctionnelle.

Théorème 23. *Soit U_∞ appartenant à $W^{1,2}(B')$ et soit (U_n,K_n) une suite de couples admissibles* (*pour F_f*) *sur B ainsi que des constantes c_n tous tels que*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \lim_{n\to\infty}\mathcal{H}^m(K_n\cap B)=0,\\
&\text{(ii)} && \lim_{n\to\infty}c_n\mathcal{H}^m\big(K_n\cap\overline{B}_\rho\big)=\gamma(\rho) \quad \textit{pour p.t. } \rho<\frac{1}{2},\\
&\text{(iii)} && \lim_{n\to\infty}\int\limits_{B_\rho} f(x,\nabla U)=\alpha(\rho) \quad \textit{pour p.t. } \rho<\frac{1}{2},\\
&\text{(iv)} && \lim_{n\to\infty}\Psi_{M,f}\big(U_n,c_n,\overline{B}_\rho\big)=0 \quad \textit{pour tout } \rho<\frac{1}{2},\\
&\text{(v)} && \lim_{n\to\infty}\overline{U}_n=U_\infty \quad \textit{dans } \mathbb{L}^2(B'),
\end{aligned}$$

alors U_∞ est un minimum local sur B' de $U\to\int_{B'}f(x,\nabla U)$, de plus $\alpha(\rho)=\int_{B_\rho}f(x,\nabla U_\infty)$ et $\gamma(\rho)=0$ pour p.t. $\rho<1/2$.

Idée de la démonstration. Comme dans la démonstration du Théorème 15 on montre la double inégalité sur $\alpha(\rho)$. Pour la première, il est à remarquer que si $(\nabla U_n)_n$ converge faiblement vers ∇V alors $\int_{B_\rho}f(x,\nabla V)\leqslant\liminf_n\int_{B_\rho}f(x,\nabla U_n)$ puisque f est convexe en la deuxième variable et continue. Pour la seconde inégalité la démonstration est très comparable.

Dans le Théorème 15 on disposait de régularité forte, l'harmonicité de U_∞ nous permettant de déduire (4.63). Aussi a-t-on besoin de régularité pour les minima locaux de $U \to \int_{B'} f(x, \nabla U)$. En fait on a :

Théorème 24. *Soit U un minimum local de $U \to \int_{B'} f(x, \nabla U)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante c telle que pour tous $0 < \rho < R < 1/2$,*

$$\int_{B_\rho} |\nabla U|^2 \leqslant c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-\varepsilon} \int_{B_R} |\nabla U|^2.$$

Démonstration. Voir le théorème 5.6 dans [6] qui exige exactement les conditions (6.66), (6.67), (6.68) et (6.69). □

Le fait de considérer une fonctionnelle F_f fait perdre $(\rho/R)^\varepsilon$ à l'estimation sur la norme $\mathbb{L}^2$ du gradient ce qui se traduit par une petite modification du Théorème 18, à savoir qu'il ne reste valable que pour des α plus petits qu'un certain nombre qui dépend de β mais cette restriction n'empêche pas pour autant de conclure.

Références

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems, Clarendon, Oxford Univ. Press, New York, 2000.

[2] M. Carriero, A. Leaci, Existence theorem for a Dirichlet problem with free discontinuity set, Nonlinear Anal. 15 (7) (1990) 661–677.

[3] G. David, Singular sets of minimizers for the Mumford–Shah functional, à paraitre.

[4] E. De Giorgi, M. Carriero, A. Leaci, Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set, Arch. Rational Mech. Anal. 108 (3) (1989) 195–218.

[5] G. Dal Maso, J.-M. Morel, S. Solimini, Une approche variationnelle en traitement d'images : résultats d'existence et d'approximation, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (19) (1989) 549–554.

[6] M. Giaquinta, Introduction to Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems, in : Lectures in Math. ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1993.

[7] P. Mattila, Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[8] E.M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.